NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 31.01.2011

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \, ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Data la funzione

$$f(x) = x \ln\bigl(\cos x\bigr) \, ,$$

a) calcolare, in $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor di ordine 3 di f ;

b) calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin(x^3)} \, .$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = (\sin x)(\cos x)\Big(\operatorname{arctg}(\cos x)\Big) .$$

4) Al variare di $x \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{1 + x^{2n}} .$$

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\dfrac{x^2+x}{x-1}$. Perciò il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{1\} = \big(-\infty\,,1\big) \cup \big(1\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = e^{\frac{2}{-0}} = e^{-\infty} = 0\ ,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = e^{\frac{2}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty\ .$$

Risulta che f ha limite sinistro 0 in $x = -1$, ma la retta $x = -1$ è un asintoto verticale da destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\ .$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{(x^2-x)+2x}{x-1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} \cdot e^{\frac{2x}{x-1}}\right) = +\infty$$

e di conseguenza f non ha asintoto obliquo (in particolare, orizzontale) per $x \to +\infty$.

Per $x \to -\infty$ invece abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,\frac{x+1}{x-1}} = e^{-\infty} = 0\ .$$

Di conseguenza $y = 0$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x)}{(x-1)^2} \\ &= e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \left(1 - \frac{2}{(x-1)^2}\right)\ . \end{aligned}$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$1-\sqrt{2}\approx -0,41421356...\,,\qquad 1+\sqrt{2}\approx 2,41421356...$$

e

$$\begin{aligned}
&f' \text{ è } >0 \text{ in } \big(-\infty\,,1-\sqrt{2}\big)\,,\\
&f' \text{ è } <0 \text{ in } \big(1-\sqrt{2}\,,1\big)\cup\big(1\,,1+\sqrt{2}\big)\,,\\
&f' \text{ è } >0 \text{ in } \big(1+\sqrt{2}\,,+\infty\big)\,.
\end{aligned}$$

Cosicché f risulta ad essere

$$\begin{aligned}
&\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,,1-\sqrt{2}\big]\,,\\
&\text{strettamente decrescente in } \big[1-\sqrt{2}\,,1\big) \text{ e in } \big(1\,,1+\sqrt{2}\big]\,,\\
&\text{strettamente crescente in } \big[1+\sqrt{2}\,,+\infty\big)\,.
\end{aligned}$$

In particolare, $1-\sqrt{2}\approx -0,41421356...$ è un punto di massimo locale e

$$f(1-\sqrt{2}) = e^{3-2\sqrt{2}} \approx 1,18717...\,,$$

mentre $1+\sqrt{2}\approx 2,41421356...$ è un punto di minimo locale e

$$f(1+\sqrt{2}) = e^{3+2\sqrt{2}} \approx 339,82375...\,.$$

Rimarchiamo che l'estensione di f ad una funzione continua a sinistra su $\mathbb{R}$, indicata con la stessa lettera f, ha la derivata sinistra in 1

$$\begin{aligned}
f_s^{'}(1) &= \lim_{1>x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{1>x\to 1}\frac{1}{x-1}\,e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\\
&\overset{t=\frac{1}{1-x}}{=} \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\,e^{-t+3-\frac{1}{t}} = 0\,.
\end{aligned}$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$0\,\vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$e^{3-2\sqrt{2}}$	$\searrow$	$0\,\vert+\infty$	$\searrow$	$e^{3+2\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y = 0$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da 0 fino al punto di massimo locale $\Big(1-\sqrt{2}\,,e^{3-2\sqrt{2}}\Big) \approx \big(-0,41\,,1,19\big)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi scende in $(1\,,0)$, dove ammette semiretta tangente orizzontale a sinistra.

Successivamente, il grafico di f scende a destra dell'asintoto verticale $x = 1$ dall'infinito fino al punto di minimo locale $\Big(1+\sqrt{2}\,,e^{3+2\sqrt{2}}\Big) \approx \big(2,41\,,339,82\big)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi sale a $+\infty$ in $+\infty$.

Commenti sui punti di flesso di f .

Guardando il grafico di f ci accorgiamo che attorno al punto di massimo locale $1-\sqrt{2}$ f dev'essere concava, mentre avvicinando da sopra l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$, f deve diventare convessa e, in modo simile, avvicinando da sopra il punto $(1\,,0)$, nel quale ha tangente orizzontale, deve diventare pure convessa. Perciò tra $-\infty$ e $1-\sqrt{2}$ dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da convessità a concavità, cioè un punto di flesso, e tra $1-\sqrt{2}$ e 1 dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da concavità a convessità, cioè un'altro punto di flesso.

In questi commenti ci proponiamo di identificare tutti i punti di flesso di f . A questo fine calcoliamo la seconda derivata di f :

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigg(e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\Big(1-\frac{2}{(x-1)^2}\Big)\bigg)\\
&= e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\bigg(\Big(1-\frac{2}{(x-1)^2}\Big)^2+\frac{4}{(x-1)^3}\bigg)\\
&= e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\bigg(1-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^4}+\frac{4}{(x-1)^3}\bigg)\\
&= \frac{e^{\frac{x^2+x}{x-1}}}{(x-1)^4}\Big((x-1)^4-4(x-1)^2+4(x-1)+4\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Risulta che il segno di $f''(x)$ coincide con il segno del polinomio

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)^4-4(x-1)^2+4(x-1)+4\\
&= \big((x-1)^2-2\big)^2+4(x-1)\,.
\end{aligned}
$$

Chiaramente, $P(x) > 0$ per $x > 1$. Per studiare il segno di P in $(-\infty\,, 1)$ ci conviene il cambio di variabile $t = x - 1$ così che

$$P(x) = Q(t) := \big(t^2 - 2)^2 + 4t\,.$$

Ora dobbiamo studiare il segno di Q nell'intervallo $(-\infty\,, 0)$. A questo fine troviamo gli intervalli di monotonia di Q:

La derivata di Q è

$$\begin{aligned} Q'(t) &= 2\,(t^2 - 2)\,2t + 4 = 4\,(t^3 - 2t + 1) \\ &= 4\,(t-1)\,(t^2 + t - 1) \end{aligned}$$

e risulta il tabello di comportamento

t	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
Q'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Q	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-1-5\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{-1+5\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Di conseguenza Q cambia segno due volte : una volta in un a tra $-\infty$ e $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, da $+$ in $-$, ed un'altra volta in un b tra $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, da $-$ in $+$.

Si verifica subito che $-2,3 < a < -2,2$:

$$Q(-2,3) = 1,6241 > 0\,, \qquad Q(-2,2) = -0,7344 < 0\,.$$

Similmente, $-0,7 < b < -0.6$:

$$Q(-0,7) = -0,5199 < 0\,, \qquad Q(-0,6) = -0,2896 > 0\,.$$

Cosicché f ha due punti di flesso, $a+1$ e $b+1$, che verificano

$$-1,3 < a+1 < -1,2 < 1-\sqrt{2} < 0 < 0,3 < b+1 < 0,4 < 1\,,$$

e

$$\begin{aligned} &f \text{ è convessa in } (-\infty\,, a+1)\,, \\ &f \text{ è concava in } (a+1\,, b+1)\,, \\ &f \text{ è convessa in } (b+1\,, 1)\,, \\ &f \text{ è convessa in } (1\,, +\infty)\,. \end{aligned}$$

2) **:** a) Il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in $x_o = 0$ sarà il prodotto di x con il polinomio di Taylor di ordine 2 di $g(x) = \ln\bigl(\cos x\bigr)$ in $x_o = 0$. Calcoliamo quindi le prime due derivate di g:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\operatorname{tg} x\,,$$

$$g''(x) = -(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Risultano

$$g(0) = 0\,, \quad g'(0) = 0\,, \quad g''(0) = -1\,,$$

e così il polinomio di Taylor di ordine 2 di g in $x_o = 0$ è

$$\frac{-1}{2!}x^2 = -\frac{x^2}{2}\,.$$

Concludiamo che il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in $x_o = 0$ è

$$x\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{2}\,.$$

b) Applicando la formula di Taylor con il resto di Peano alla funzione f si ottiene

$$f(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \;\text{ per }\; x \to 0\,.$$

Cosicché

$$\frac{f(x)}{\sin(x^3)} = \frac{-\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\sin(x^3)} \;\text{ per }\; x \to 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin(x^3)} = -\frac{1}{2}\,.$$

3) **:** Poiché l'integrando è il prodotto della funzione di solo $\cos x$

$$-(\cos x)\Bigl(\operatorname{arctg}(\cos x)\Bigr)$$

e la derivata $-\sin x$ di $\cos x$, possiamo semplificare i calcoli tramite la sostituzione

$$t = \cos x\,, \qquad \mathrm{d}t = -\,\sin x\,\mathrm{d}x$$

ottenendo

$$\int (\sin x)(\cos x)\Big(\operatorname{arctg}(\cos x)\Big)\,\mathrm{d}x = -\int \Big(t\operatorname{arctg} t\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora usiamo integrazione per parti per ridurre il calcolo all'integrazione di una funzione razionale :

$$\begin{aligned}
-\int \Big(t\operatorname{arctg} t\Big)\,\mathrm{d}t &= -\int \Big(\operatorname{arctg} t\Big)\,\mathrm{d}\Big(\frac{t^2}{2}\Big) \\
&= -\,\frac{t^2\operatorname{arctg} t}{2} + \int \Big(\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= -\,\frac{t^2\operatorname{arctg} t}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\,\frac{t^2\operatorname{arctg} t}{2} + \frac{1}{2}\int \Big(1-\frac{1}{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= -\,\frac{t^2\operatorname{arctg} t}{2} + \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{arctg} t}{2} + C \\
&= -\,\frac{(1+t^2)\operatorname{arctg} t}{2} + \frac{t}{2} + C\,.
\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\int (\sin x)(\cos x)\Big(\operatorname{arctg}(\cos x)\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\,\frac{(1+\cos^2 x)\operatorname{arctg}(\cos x)}{2} + \frac{\cos x}{2} + C\,.$$

4) : Per $|x| > 1$ abbiamo

$$\left|\frac{\sin(x^n)}{1+x^{2n}}\right| \le \frac{1}{x^{2n}} = \Big(\frac{1}{x^2}\Big)^n$$

e la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)^n$$

converge. Usando il criterio del confronto risulta che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{1+x^{2n}}$$

è assolutamente convergente.

Per $|x| < 1$ possiamo usare la disuguaglianza nota

$$|\sin \alpha| \leq |\alpha|\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

e dedurre

$$\left| \frac{\sin(x^n)}{1+x^{2n}} \right| \leq \big|\sin(x^n)\big| \leq \big|x\big|^n .$$

Poiché la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|x\big|^n$$

converge, anche in questo caso la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{1+x^{2n}}$$

converge assolutamente.

Finalmente, se $|x| = 1$ allora il termine generale

$$\left. \frac{\sin(x^n)}{1+x^{2n}} \right|_{x=\pm 1} = \pm \frac{\sin 1}{2}$$

della serie non converge a 0 e così la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{1+x^{2n}}$$

non è convergente.

Conclusione : la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{1+x^{2n}}$$

converge assolutamente per $x \in \big(-\infty\,, -1\big) \cup \big(-1\,, 1\big) \cup \big(1\,, +\infty\big)$ e non converge per $x = -1$ e $x = 1$.