Commenti sulle radici quadrate dei numeri complessi

Discutiamo le radici quadrate di un numero complesso $a + b\,i$ $(a, b \in \mathbb{R})$ nel campo complesso, cioè i numeri complessi z che soddisfano l'equazione

$$z^2 = a + b\,i\,.$$

A questo scopo scriviamo $a + bi$ in forma trigonometrica :

$$a + bi = \rho\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,,$$

ove

$$\rho = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

è il *modulo* di $a+b\,i$, mentre φ è il suo *argomento*, determinato dalle relazioni

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \tag{*}$$

solo a meno di multipli di 2π (in altre parole, se φ soddisfa (*), allora anche ogni $\varphi + 2\,k\pi$ con k intero la soddisfa e qualsiasi soluzione di (*) è di questa forma). Ricordiamo che di solito l'argomento φ viene scelto nell'uno degli intervalli $\big[0, 2\,\pi\big)$ e $\big(-\pi, \pi\big]$.

Ora, se $z = r\,\big(\cos\psi + i\sin\psi\big)$ e $z^2 = a + b\,i$, allora la formula di De Moivre implica

$$r^2\big(\cos(2\,\psi) + i\sin(2\,\psi)\big) = \rho\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,,$$

cioè $r^2 = \rho$ e

$$\begin{aligned} 2\,\psi &= \varphi + 2\,k\,\pi\,,\ \text{ ossia} \\ \psi &= \frac{\varphi}{2} + k\,\pi \end{aligned}$$

per un k intero. Perciò le radici quadrate di $a+b\,i$ nel campo complesso sono

$$z_k = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + k\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + k\,\pi\right)\right), \qquad k \text{ intero}\,.$$

Ma, poiché "cos" e "sin" sono funzioni periodiche col periodo 2π, abbiamo

$$\begin{aligned} z_{k+2} &= \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+(k+2)\,\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+(k+2)\,\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi+2\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi\right)\right) \\ &= z_k\,, \end{aligned}$$

quindi

$$\ldots = z_{-2} = z_o = z_2 = z_4 = \ldots\,, \qquad \ldots = z_{-1} = z_1 = z_3 = z_5 = \ldots\,.$$

Risulta che ogni radice quadrata di $a+bi$ nel campo complesso è uguale ad uno di

$$z_o = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

e

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right) = \sqrt{\rho}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= -\,z_o\,. \end{aligned}$$

Così possiamo dire che le radici quadrate di $a+bi$ nel campo complesso sono

$$\pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\,. \tag{**}$$

Ma possiamo andare anche oltre e calcolare queste radici esplicitamente.

A questo fine applichiamo le formule trigonometriche note che esprimono $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2}$ in funzione di $\cos\varphi$:

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{\varphi}{2} &= \frac{1+\cos\varphi}{2} \overset{(*)}{=} \frac{1+\dfrac{a}{\rho}}{2} = \frac{\rho+a}{2\rho}\,, \\ \sin^2\frac{\varphi}{2} &= \frac{1-\cos\varphi}{2} \overset{(*)}{=} \frac{1-\dfrac{a}{\rho}}{2} = \frac{\rho-a}{2\rho}\,. \end{aligned}$$

Uno delle radici (**), diciamo z, ha la parte reale positiva, e quindi uguale a

$$\sqrt{\rho}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = \sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho+a}{2\,\rho}} = \sqrt{\frac{\rho+a}{2}}\,.$$

D'altra parte, la parte imaginaria di z è

$$\pm\sqrt{\rho}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = \pm\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho-a}{2\,\rho}} = \pm\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\,.$$

Per trovare la scelta giusta del segno, facciamo la prova :

$$\begin{aligned} a+b\,i &= \left(\sqrt{\frac{\rho+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{\rho+a}{2} - \frac{\rho-a}{2} \pm 2\,i\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}\sqrt{\frac{\rho-a}{2}} \\ &= a \pm i\sqrt{\rho^2-a^2} \\ &= a \pm i\sqrt{b^2} \\ &= a \pm i\,|b| \end{aligned}$$

Così il segno della parte immaginaria di z è quello che fa $b = \pm|b|$, cioè

$$\frac{b}{|b|} \ \text{ se } \ b \neq 0$$

e non importa quale se $b = 0$. Di conseguenza

$$z = \sqrt{\frac{\rho+a}{2}} + i\,\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\rho-a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

e le radici (**) possono essere scritte in forma

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)\,, \qquad (***)$$

dove conveniamo che $\dfrac{b}{|b|} = 1$ se $b = 0$, nel quale caso la formula (***) si legge

$$\pm\left(\sqrt{\frac{|a|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|a|-a}{2}}\right) = \begin{cases} \pm\sqrt{|a|} & \text{se } a \geq 0\,, \\ \pm i\sqrt{|a|} & \text{se } a \leq 0\,. \end{cases}$$

Esempi:

Applicando la formula (***), si trova che

1) le radici quadratiche di $\sqrt{3}-i$ sono

$$\begin{aligned} &\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3+1}+\sqrt{3}}{2}}+i\,\frac{-1}{1}\sqrt{\frac{\sqrt{3+1}-\sqrt{3}}{2}}\right)\\ =\ &\pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)\ ; \end{aligned}$$

2) le radici quadratiche di $1-i$ sono

$$\begin{aligned} &\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+1}+1}{2}}+i\,\frac{-1}{1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+1}-1}{2}}\right)\\ =\ &\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\ ; \end{aligned}$$

3) le radici quadratiche di $-4-i$ sono

$$\begin{aligned} &\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{16+1}-4}{2}}+i\,\frac{-1}{1}\sqrt{\frac{\sqrt{16+1}+4}{2}}\right)\\ =\ &\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{17}+4}{2}}\right)\ . \end{aligned}$$