Sulla convergenza degli integrali impropri:

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e sia la funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann). Allora le funzioni

$$[a,b] \ni b' \longmapsto \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$[a,b] \ni a' \longmapsto \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a'} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sono continue (addirittura lipschitziane !), perciò

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b>b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se scegliamo un $x_o \in (a,b)$ ed applichiamo le identità precedenti alle restrizioni di f su $[a,x_o]$ rispettivamente $[x_o,b]$, otteniamo anche

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_o} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_o}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{x_o} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b>b'\to b} \int_{x_o}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{a<a'\to a \\ b>b'\to b}} \left(\int_{a'}^{x_o} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_o}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\substack{a<a'\to a \\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Ma anche se f fosse definita solo su $[a,b)$ (nel quale caso possiamo avere anche $b = +\infty$), può accadere che f sia integrabile su ogni intervallo $[a,b']$, $a < b' < b$, ed esisti il limite

$$\lim_{b>b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,.$$

In questo caso parliamo dell'*integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b>b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$$

di f su $[a,b)$.

Similmente, se f è definita su $(a,b]$ (quando anche $a=-\infty$ è possibile), è integrabile su ogni $[a',b]$, $a<a'<b$, ed esiste il limite

$$\lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

allora parliamo dell'*integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

di f su $(a,b]$.

! Più generale, supponiamo che $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $a<a'<b'<b$, la restrizione di f su $[a',b']$ è integrabile (secondo Riemann). Chiaramente, se f è continua o monotona, allora la condizione precedente di integrabilità su tutti gli intervalli compatti $[a',b']\subset(a,b)$ è soddisfatta.

Se esiste il limite

$$\lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in [-\infty,+\infty]$$

allora diciamo che esiste *l'integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se l'integrale proprio $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste ed è finito, cioè se

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

allora diciamo che l'integrale proprio *converge.* Se invece l'integrale proprio $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste e non è finito, cioè se

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty \quad \text{o} \quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\,,$$

allora diciamo che l'integrale proprio *diverge.*

Se $f \geq 0$ l'integrale improprio esiste sempre:

$\rightarrow$ *Sia* $f : (a,b) \rightarrow [0,+\infty)$ *integrabile su ogni intervallo* $[a',b'] \subset (a,b)$. *Allora esiste l'integrale improprio*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{a<a'<b'<b} \int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in [0,+\infty]\,.$$

In particolare, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge se e solo se esiste una costante* $C \geq 0$ *tale che*

$$\int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \leq C \;\; \textit{per ogni} \;\; a < a' < b' < b\,.$$

Dimostrazione. Indichiamo

$$I = \sup_{a<a'<b'<b} \int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in [0,+\infty]\,.$$

Sia $I' < I$ arbitrario. Allora, secondo la definizione dell'estremo superiore, esistono $a < a_o < b_o < b$ con

$$\int_{a_o}^{b_o} f(x)\,\mathrm{d}x > I'$$

e per la positività di f risulta

$$a < a' < a_o\,,\ b_o < b' < b \implies I' < \int_{a_o}^{b_o} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \le I.$$

Cosicché

$$\lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = I\,.$$

Ne risulta il *criterio del confronto* per la convergenza degli integrali impropri :

→ *Siano* $f, g : (a,b) \to [0,+\infty)$ *funzioni integrabili su ogni* $[a',b'] \subset (a,b)$ *. Se*

$$0 \le f(x) \le g(x)\,, \qquad a < x < b\,,$$

allora

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{ converge} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{ converge}\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{ diverge} \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{ diverge}\,.$$

Una forma particolare utile del criterio del confronto è il *criterio del confronto asintotico* :

→ *Per* $-\infty < a < b \le +\infty$ *siano* $f, g : [a,b) \to (0,+\infty)$ *due funzioni integrabili su ogni intervallo* $[a,b']$ *con* $a < b' < b$ *. Supponiamo inoltre che esista il limite*

$$L = \lim_{b>x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0,+\infty]\,.$$

Allora

$$L < +\infty\,,\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{ converge} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{ converge}\,,$$

$$L > 0\,, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge} \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge}\,.$$

In particolare, se $0 < L < +\infty$ *(cioè se* f *e* g *sono asintoticamente equivalenti in* b *) allora*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge} \Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge}\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $L < +\infty$ e che l'integrale improprio $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Scegliamo un $L < L'' < +\infty$. Allora esiste un $a < b_o < b$ tale che

$$b_o \leq x < b \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < L'' \ \text{cioè} \ f(x) < L''\,g(x)$$

e dal criterio del confronto risulta la convergenza dell'integrale improprio $\int_{b_o}^b f(x)\,\mathrm{d}x$, quindi anche di $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se invece $L > 0$, allora

$$\lim_{b > x \to b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{L} < +\infty$$

e secondo l'implicazione già dimostrata qui sopra abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{converge} \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \text{converge.}$$

Similmente si verifica :

→ *Per* $-\infty \leq a < b < +\infty$ *siano* $f, g : (a, b] \to (0, +\infty)$ *due funzioni integrabili su ogni intervallo* $[a', b]$ *con* $a < a' < b$. *Supponiamo inoltre che esista il limite*

$$L = \lim_{a < x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0, +\infty]\,.$$

Allora

$$L < +\infty\,, \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge}\,,$$

$$L > 0\,, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge} \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge}\,.$$

In particolare, se $0 < L < +\infty$ *(cioè se* f *e* g *sono asintoticamente equivalenti in* a*) allora*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge} \iff \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge}\,.$$

Esempi:

! *L'integrale improprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^d \mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $d < -1$ *(in altre parole,* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^c}\,\mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $c > 1$*).*

Infatti, se $d \neq -1$, cioè $d+1 \neq 0$, allora

$$\int_1^{+\infty} x^d \mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \int_1^{b'} x^d \mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \frac{1}{d+1}\Big((b')^{d+1} - 1\Big)$$

è finito esattamente quando $d+1 < 0$, cioè $d < -1$. D'altro canto, per $d = 1$ abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \int_1^{b'} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \log b' = +\infty\,.$$

Similmente si dimostra :

! *L'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^{1} x^d \mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $d > -1$ *(in altre* *parole,* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^c}\,\mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $c < 1$).

Vediamo ora :

! *Per che valori del parametro reale* α *converge l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad ?$$

L'integrale è improprio sia in 0 che all'infinito. Esaminiamo prima la convergenza in 0, cioè la convergenza degli integrali del tipo

$$\int_0^a \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

ove $a > 0$. Ovviamente, la convergenza di quest'integrale per un $a_o > 0$ implica la sua convergenza per ogni $a > 0$. Basta perciò considerare (per esempio) il caso $a = 1$.

Ora le funzioni $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}$ e x^α sono asintoticamente equivalenti in 0:

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}}{x^\alpha} = \lim_{0<x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1\,.$$

Perciò

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha > -1\,.$$

Esaminiamo adesso la convergenza del nostro integtrale all'infinito, cioè la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

A questa fine vediamo, che potenza di x è asintoticamente equivalente con $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}$ in $+\infty$, cioè per che valore $\beta \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-\beta}}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-\beta-2}}{\dfrac{1}{x^2}+1} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta-2}$$

è finito e nonzero. Ma questo accade esattamente quando $\alpha-\beta-2=0$, ossia $\beta=\alpha-2$. Di conseguenza le funzioni $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}$ e $x^{\alpha-2}$ sono asintoticamente equivalenti in $+\infty$. Risulta

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} x^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \alpha-2<-1\,,$$

cioè

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \alpha<1\,.$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \\ \iff &\int_0^{1} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ e } \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ convergono} \\ \iff &\alpha>-1 \text{ e } \alpha<1 \\ \iff &-1<\alpha<1\,. \end{aligned}$$