NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Test del 16.10.2007

1) Chi è più grande :

$$\frac{999}{998}\sum_{n=0}^{999}\left(\frac{1}{1000}\right)^n \quad \text{o} \quad \frac{1000}{999}\sum_{n=0}^{999}\left(\frac{1}{999}\right)^n \quad ?$$

2) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi e dire se si tratta di massimi o minimi :

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{k} \,;\, n, k \geq 2 \ \text{ interi} \right\},$$
$$A_2 = \left\{ \frac{2n-1}{n+1} \,;\, n \geq 0 \ \text{ intero} \right\}.$$

3) Si verifichi che per ogni numero reale $x > 0$ abbiamo

$$\big(1+x\big)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{x}{3}\,.$$

4) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\Big|1 - |x-1|\Big| < |x| - 1\,.$$

5) Determinare l'insieme massimo di definizione della funzione definita dalla formula

$$f(x) = \sqrt{1 - \left|\frac{x+5}{x^2-1}\right|}\,.$$

Soluzioni:

1) **:** Ricordiamo che per ogni numero reale $q \neq 1$ ed ogni intero $k \geq 0$ vale la formula

$$\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \, .$$

Perciò

$$\sum_{n=0}^{999} \left(\frac{1}{1000}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{1000}\right)^{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{1000}{999}\left(1-\left(\frac{1}{1000}\right)^{1000}\right) ,$$

$$\sum_{n=0}^{999} \left(\frac{1}{999}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1000}}{1-\frac{1}{999}} = \frac{999}{998}\left(1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1000}\right) .$$

Risultano le uguaglianze

$$\frac{999}{998}\sum_{n=0}^{999} \left(\frac{1}{1000}\right)^n = \frac{1000}{998}\left(1-\left(\frac{1}{1000}\right)^{1000}\right) ,$$

$$\frac{1000}{999}\sum_{n=0}^{999} \left(\frac{1}{999}\right)^n = \frac{1000}{998}\left(1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1000}\right)$$

e poiché

$$\left(\frac{1}{1000}\right)^{1000} < \left(\frac{1}{999}\right)^{1000} \quad \Longrightarrow \quad 1-\left(\frac{1}{1000}\right)^{1000} > 1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1000} ,$$

concludiamo che

$$\frac{999}{998}\sum_{n=0}^{999} \left(\frac{1}{1000}\right)^n \text{ è più grande di } \frac{1000}{999}\sum_{n=0}^{999} \left(\frac{1}{999}\right)^n .$$

2) **:** **Riguardo** A_1 :

$\dfrac{1}{n^2+1} - \dfrac{1}{k}$ è tanto più grande quanto n è più piccolo e k è più grande.
Il più piccolo valore per n è $n=2$, mentre k può essere arbitrariamente grande. Perciò è ragionevole pensare che l'estremo superiore di A_1 sia $\dfrac{1}{2^2+1} - \dfrac{1}{\infty} = \dfrac{1}{5}$.

Similmente, il più piccolo valore per k è $k = 2$, mentre n può essere arbitrariamente grande, perciò è ragionevole pensare che l'estremo inferiore di A_1 sia $\frac{1}{\infty} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Verifichiamo che è veramente così.

- Da una parte abbiamo

$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{k} < \frac{1}{5}, \qquad n, k \geq 2,$$

quindi $\frac{1}{5}$ è un maggiorante di A_1. Poi, nessun $\lambda < \frac{1}{5}$ è un maggiorante di A_1. Infatti, per un tale λ abbiamo

$$\frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{k} > \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{5} - \lambda}_{>0} > \frac{1}{k}$$

appena l'intero k diventa più grande di $\left(\frac{1}{5} - \lambda\right)^{-1}$. Cosicché $\frac{1}{5}$ è il più piccolo maggiorante di A_1, cioè il suo estremo superiore.

Chiaramente, $\frac{1}{5}$ non è un massimo perché non appartiene ad A_1:

$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{5}$$

implicherebbe la contradizione

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{k} < \frac{1}{5}.$$

- D'altra parte,

$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}, \qquad n, k \geq 2,$$

quindi $-\frac{1}{2}$ è un minorante di A_1. Poi, nessun $\mu > -\frac{1}{2}$ è un minorante di A_1. Infatti, per un tale μ abbiamo

$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2} < \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} < \underbrace{\mu + \frac{1}{2}}_{>0}$$

appena l'intero n^2+1 diventa più grande di $\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^{-1}$. Cosicché $-\frac{1}{2}$ è il più grande minorante di A_1, cioè il suo estremo inferiore.

Chiaramente, $-\frac{1}{2}$ non è un minimo perché non appartiene ad A_1 :

$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$$

implicherebbe la contradizione

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}\,.$$

Riguardo A_2 :

$$\frac{2n-1}{n+1} = \frac{(2n+2)-3}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} = \begin{cases} < 2\,, \\ \geq 2 - \dfrac{3}{0+1} = -1 \end{cases}$$

implica che 2 è un maggiorante di A_2, e -1 è un minorante.

- Poiché $-1 = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0+1}$ appartiene ad A_2, esso è un minimo, in particolare l'estremo inferiore.
- Mostriamo che 2 è il più piccolo maggiorante di A_2, cioè l'estremo superiore. Infatti, nessun $\lambda < 2$ è un maggiorante per A_2, perché abbiamo

$$2 - \frac{3}{n+1} = \frac{2n-1}{n+1} > \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{2-\lambda}_{>0} > \frac{3}{n+1}$$

appena $n+1$ diventa più grande di $\frac{3}{2-\lambda}$.

Si verifica poi facilmente che 2 non appartiene ad A_2 e così non è un massimo :

$2 - \frac{3}{n+1} = \frac{2n-1}{n+1} = 2$ implicherebbe la contradizione $\frac{3}{n+1} = 0$.

3) : Dalla disuguaglianza di Bernoulli risulta

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3 > 1+3\cdot\frac{x}{3} = 1+x\,,$$

cioè

$$1+\frac{x}{3} > \left(1+x\right)^{\frac{1}{3}}.$$

4) : Si vede facilmente che

$$\Big|1-|x-1|\Big| = \begin{cases} \big|1-(x-1)\big| = x-2\,, & \text{se } x\geq 2\,,\\ \big|1-(x-1)\big| = 2-x\,, & \text{se } 1\leq x\leq 2\,,\\ \big|1-(1-x)\big| = |x| = x\,, & \text{se } 0\leq x\leq 1\,,\\ \big|1-(1-x)\big| = |x| = -x\,, & \text{se } x\leq 0\,. \end{cases}$$

Perciò $\Big|1-|x-1|\Big| < |x|-1$ significa

$$\begin{aligned} \text{per } x\geq 2 :&\quad x-2<x-1\,,\ \text{che vale sempre}\ ,\\ \text{per } 1\leq x\leq 2 :&\quad 2-x<x-1\,,\ \text{che accade se } x>\frac{3}{2}\,,\\ \text{per } 0\leq x\leq 1 :&\quad x<x-1\,,\ \text{che non accade mai}\ ,\\ \text{per } x\leq 0 :&\quad -x<-x-1\,,\ \text{che non accade mai}\ . \end{aligned}$$

Risulta che la soluzione della disequazione $\Big|\,1-|x-1|\Big| < |x|-1$ è $x>\dfrac{3}{2}$.

5) : La formula che definisce f ha senso se

$$x^2-1\neq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x\neq\pm 1$$

e (assumendo che $\big|x^2-1\big|>0$)

$$1-\left|\frac{x+5}{x^2-1}\right|\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \big|x+5\big|\leq\big|x^2-1\big|\,.$$

Poi, la disuguaglianza $\big|x+5\big|\leq\big|x^2-1\big|$ significa

$$\begin{aligned} \text{per } x\geq 1 :&\quad x+5\leq x^2-1 \iff x^2-x-6\geq 0\,,\\ \text{per } -1\leq x\leq 1 :&\quad x+5\leq 1-x^2 \iff x^2+x+4\leq 0\,,\\ \text{per } -5\leq x\leq -1 :&\quad x+5\leq x^2-1 \iff x^2-x-6\geq 0\,,\\ \text{per } x\leq -5 :&\quad -x-5\leq x^2-1; \iff x^2+x+4\geq 0\,. \end{aligned}$$

Ora le soluzioni dell'equazione quadratica $x^2 - x - 6 = 0$ sono

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{c} 3 \\ \\ -2 \end{array} \right. ,$$

mentre l'equazione $x^2 + x + 4 = 0$ non ha soluzioni reali. Perciò

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \geq 3 \text{ oppure } x \leq -2\,, \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 3\,. \end{aligned}$$

e

$$x^2 + x + 4 \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Risulta che $\big|x + 5\big| \leq \big|x^2 - 1\big|$ significa

$$\begin{aligned} \text{per } x \geq 1 : \quad & x^2 - x - 6 \geq 0\,, \text{ che accade se } x \geq 3\,, \\ \text{per } -1 \leq x \leq 1 : \quad & x^2 + x + 4 \leq 0\,, \text{ che non accade mai }, \\ \text{per } -5 \leq x \leq -1 : \quad & x^2 - x - 6 \geq 0\,, \text{ che accade se } x \leq -2\,, \\ \text{per } x \leq -5 : \quad & x^2 + x + 4 \geq 0\,, \text{ che vale sempre }. \end{aligned}$$

Di conseguenza il dominio massimo sulla quale la formula

$$f(x) = \sqrt{1 - \left|\frac{x + 5}{x^2 - 1}\right|}$$

definisce una funzione è $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.