NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Test del 16.10.2007

1) Chi è più grande :

$$\frac{999}{998}\sum_{n=0}^{1000}\left(\frac{1}{998}\right)^n \quad \text{o} \quad \frac{998}{997}\sum_{n=0}^{1000}\left(\frac{1}{999}\right)^n \quad ?$$

2) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi e dire se si tratta di massimi o minimi :

$$A_1 = \left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^2}\,;\, n, k \geq 2 \ \text{interi}\right\},$$
$$A_2 = \left\{\frac{n-2}{n+1}\,;\, n \geq 0 \ \text{intero}\right\}.$$

3) Si verifichi che per ogni numero reale $x > 0$ abbiamo

$$\big(1+x\big)^{\frac{1}{4}} < 1 + \frac{x}{4}\,.$$

4) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\Big|1 - |x+1|\Big| < 1 - |x|\,.$$

5) Determinare l'insieme massimo di definizione della funzione definita dalla formula

$$f(x) = \sqrt{\big|x^2 - 2\big| - \big|x\big|}\,.$$

Soluzioni:

1) **:** Ricordiamo che per ogni numero reale $q \neq 1$ ed ogni intero $k \geq 0$ vale la formula

$$\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} .$$

Perciò

$$\sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{1}{998}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{998}\right)^{1001}}{1-\frac{1}{998}} = \frac{998}{997}\left(1-\left(\frac{1}{998}\right)^{1001}\right) ,$$

$$\sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{1}{999}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1001}}{1-\frac{1}{999}} = \frac{999}{998}\left(1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1001}\right) .$$

Risultano le uguaglianze

$$\frac{999}{998}\sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{1}{998}\right)^n = \frac{999}{997}\left(1-\left(\frac{1}{998}\right)^{1001}\right) ,$$

$$\frac{998}{997}\sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{1}{999}\right)^n = \frac{999}{997}\left(1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1001}\right)$$

e poiché

$$\left(\frac{1}{998}\right)^{1001} > \left(\frac{1}{999}\right)^{1001} \quad \Longrightarrow \quad 1-\left(\frac{1}{998}\right)^{1001} < 1-\left(\frac{1}{999}\right)^{1001} ,$$

concludiamo che

$$\frac{998}{997}\sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{1}{999}\right)^n \text{ è più grande di } \frac{999}{998}\sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{1}{998}\right)^n .$$

2) **:** **Riguardo** A_1 :

$\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{k^2}$ è tanto più grande quanto n è più piccolo e k è più grande.

Il più piccolo valore per n è $n = 2$, mentre k può essere arbitrariamente grande. Perciò è ragionevole pensare che l'estremo superiore di A_1 sia $\dfrac{1}{2+1} - \dfrac{1}{\infty} = \dfrac{1}{3}$.

Similmente, il più piccolo valore per k è $k = 2$, mentre n può essere arbitrariamente grande, perciò è ragionevole pensare che l'estremo inferiore di A_1 sia $\dfrac{1}{\infty} - \dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$.

Verifichiamo che è veramente così.

- Da una parte abbiamo

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2+1} - \frac{1}{k^2} < \frac{1}{3}, \qquad n, k \geq 2,$$

quindi $\dfrac{1}{3}$ è un maggiorante di A_1. Poi, nessun $\lambda < \dfrac{1}{3}$ è un maggiorante di A_1. Infatti, per un tale λ abbiamo

$$\frac{1}{2+1} - \frac{1}{k^2} > \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{3} - \lambda}_{>0} > \frac{1}{k^2}$$

appena l'intero k^2 diventa più grande di $\left(\dfrac{1}{3} - \lambda\right)^{-1}$. Cosicché $\dfrac{1}{3}$ è il più piccolo maggiorante di A_1, cioè il suo estremo superiore.

Chiaramente, $\dfrac{1}{3}$ non è un massimo perché non appartiene ad A_1:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{3}$$

implicherebbe la contradizione

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2+1} - \frac{1}{k^2} < \frac{1}{3}.$$

- D'altra parte,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^2} > -\frac{1}{4}, \qquad n, k \geq 2,$$

quindi $-\dfrac{1}{4}$ è un minorante di A_1. Poi, nessun $\mu > -\dfrac{1}{4}$ è un minorante di A_1. Infatti, per un tale μ abbiamo

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^2} < \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \underbrace{\mu + \frac{1}{4}}_{>0}$$

appena l'intero $n+1$ diventa più grande di $\left(\mu + \frac{1}{4}\right)^{-1}$. Cosicché $-\frac{1}{4}$ è il più grande minorante di A_1 , cioè il suo estremo inferiore.

Chiaramente, $-\frac{1}{4}$ non è un minimo perché non appartiene ad A_1 :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{4}$$

implicherebbe la contradizione

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^2} > -\frac{1}{4}\,.$$

Riguardo A_2 :

$$\frac{n-2}{n+1} = \frac{(n+1)-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} = \begin{cases} < 1\,, \\ \geq 1 - \dfrac{3}{0+1} = -2 \end{cases}$$

implica che 1 è un maggiorante di A_2 , e -2 è un minorante.

- Poiché $-2 = \frac{0-2}{0+1}$ appartiene ad A_2 , esso è un minimo, in particolare l'estremo inferiore.

- Mostriamo che 1 è il più piccolo maggiorante di A_2 , cioè l'estremo superiore. Infatti, nessun $\lambda < 1$ è un maggiorante per A_2 , perché abbiamo

$$1 - \frac{3}{n+1} = \frac{n-2}{n+1} > \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{1-\lambda}_{>0} > \frac{3}{n+1}$$

appena $n+1$ diventa più grande di $\frac{3}{1-\lambda}$.

Si verifica poi facilmente che 1 non appartiene ad A_2 e così non è un massimo :

$$1 - \frac{3}{n+1} = \frac{n-2}{n+1} = 1 \text{ implicherebbe la contradizione } \frac{3}{n+1} = 0\,.$$

3) : Dalla disuguaglianza di Bernoulli risulta

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^4 > 1+4\cdot\frac{x}{4} = 1+x\,,$$

cioè

$$1+\frac{x}{4} > \left(1+x\right)^{\frac{1}{4}}.$$

4) : Si vede facilmente che

$$\Big|1-|x+1|\Big| = \begin{cases} \big|1-(x+1)\big| = |x| = x\,, & \text{se } x\geq 0\,,\\ \big|1-(x+1)\big| = |x| = -x\,, & \text{se } -1\leq x\leq 0\,,\\ \big|1+(x+1)\big| = |x+2| = x+2\,, & \text{se } -2\leq x\leq -1\,,\\ \big|1+(x+1)\big| = |x+2| = -x-2\,, & \text{se } x\leq -2\,. \end{cases}$$

Perciò $\Big|1-|x+1|\Big| < 1-|x|$ significa

$$\begin{aligned} \text{per } x\geq 0 : &\quad x<1-x\,,\ \text{che accade se } x<\frac{1}{2}\\ \text{per } -1\leq x\leq 0 : &\quad -x<1+x\,,\ \text{che accade se } x>-\frac{1}{2}\,,\\ \text{per } -2\leq x\leq -1 : &\quad x+2<1+x\,,\ \text{che non accade mai}\ ,\\ \text{per } x\leq -2 : &\quad -x-2<1+x \iff x>-\frac{3}{2}\\ &\quad \text{che non accade mai se } x\leq -2\,. \end{aligned}$$

Risulta che la soluzione della disequazione $\Big|1-|x+1|\Big| < 1-|x|$ è $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

5) : La formula che definisce f ha senso se vale la disuguaglianza

$$\big|x^2-2\big| \geq \big|x\big|\,,$$

che significa

$$\begin{aligned} \text{per } x\geq\sqrt{2} : &\quad x^2-2\geq x \iff x^2-x-2\geq 0\,,\\ \text{per } 0\leq x\leq\sqrt{2} : &\quad -x^2+2\geq x \iff x^2+x-2\leq 0\,,\\ \text{per } -\sqrt{2}\leq x\leq 0 : &\quad -x^2+2\geq -x \iff x^2-x-2\leq 0\,,\\ \text{per } x\leq -\sqrt{2} : &\quad x^2-2\geq -x \iff x^2+x-2\geq 0\,. \end{aligned}$$

Ora le soluzioni dell'equazione quadratica $x^2 - x - 2 = 0$ sono

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \Big\langle \begin{array}{l} 2 \\ \\ -1 \end{array} ,$$

perciò

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \geq 2 \ \text{ oppure } \ x \leq -1 \,, \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 2 \,. \end{aligned}$$

Similmente, le soluzioni dell'equazione quadratica $x^2 + x - 2 = 0$ sono

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \Big\langle \begin{array}{l} 1 \\ \\ -2 \end{array} ,$$

perciò

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \geq 1 \ \text{ oppure } \ x \leq -2 \,, \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 1 \,. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\left|x^2 - 2\right| \geq \left|x\right| ,$$

significa

$$\begin{aligned} \text{per } \ x \geq \sqrt{2} \ : &\quad x^2 - x - 2 \geq 0 \,, \ \text{che accade se } \ x \geq 2 \,, \\ \text{per } \ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \ : &\quad x^2 + x - 2 \leq 0 \,, \ \text{che accade se } \ x \leq 1 \,, \\ \text{per } \ -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \ : &\quad x^2 - x - 2 \leq 0 \,, \ \text{che accade se } \ x \geq -1 \,, \\ \text{per } \ x \leq -\sqrt{2} \ : &\quad x^2 + x - 2 \geq 0 \,, \ \text{che accade se } \ x \leq -2 \,. \end{aligned}$$

Cosicché il dominio massimo sulla quale la formula

$$f(x) = \sqrt{\left|x^2 - 2\right| - \left|x\right|}$$

definisce una funzione è $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.