NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Test del 15.11.2007

1) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{(n^2)}} \left(\frac{2n^3 + 3n}{n^3} \right)^{n^2} .$$

2) Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

è continua in 0.

3) Dire se la funzione $f : (0\,,1) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{1 - \log x}$$

è monotona e verificare se è prolungabile con continuità in 0.

4) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\sin^3 x} \log(1 + x^2)\ .$$

5) Verificare se esiste un $x \in (1, 2)$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{2}\ .$$

Soluzioni:

1) **:** Usando il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0}\big(1+t\big)^{1/t}=e$, si deduce

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{(n^2)}}\left(\frac{2n^3+3\,n}{n^3}\right)^{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+3\,n}{2\,n^3}\right)^{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2\,n^2}\right)^{\frac{2\,n^2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\\ &= \left[\lim_{t\to 0}\big(1+t\big)^{1/t}\right]^{\frac{3}{2}}\\ &= e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}\,.\end{aligned}$$

2) **:** Poiché

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0\,,\\ \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} \ \ = e^{-\infty} = 0\,,\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ esiste ed è uguale a $0 = f(0)$. Risulta che la funzione f è continua in 0.

3) **:** Osserviamo prima che la funzione

$$h:(0\,,1)\ni x\longmapsto \log x\in(-\infty,0)$$

è strettamente crescente. Poi la funzione

$$g:(-\infty,0)\ni y\longmapsto \frac{1+y}{1-y} = 1+\frac{2}{1-y}\in\mathbb{R}$$

è pure strettamente crescente. Perciò la funzione composta

$$f=g\circ h:(0\,,1)\ni x\longmapsto \frac{1+\log x}{1-\log x}\in\mathbb{R}$$

è strettamente crescente.

Ora verifichiamo che f ha limite in 0. Infatti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\log x}{1-\log x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{1}{\log x}+1\right)\log x}{\left(\dfrac{1}{\log x}-1\right)\log x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\log x}+1}{\dfrac{1}{\log x}-1} = -1 \, .$$

Risulta che, ponendo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in (0\,,1) \\ -1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad ,$$

si ottiene una funzione continua $\widetilde{f} : [0\,,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ che estende f, cioè una estensione continua di f su $[0\,,1)$.

4) : Usando i limiti notevoli

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1\,, \quad \lim_{v\to 0} \frac{\log(1+v)}{v} = 1\,,$$

si deduce

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{\sin^3 x} \log(1+x^2) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x} \, \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^3 x} \, \log(1+x^2) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x} \, \frac{1}{\cos x} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} \cdot \frac{1}{\cos 0} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \\ &\qquad \cdot \lim_{v\to 0} \frac{\log(1+v)}{v} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 1 = 1 \, . \end{aligned}$$

5) : La funzione continua

$$f : (0, +\infty) \ni x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2}$$

prende

$$\text{in } x = 1 \text{ il valore } f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \,,$$
$$\text{in } x = 2 \text{ il valore } f(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0 \,.$$

Perciò il teorema degli zeri implica che f ammette un zero nell'intervallo $(1, 2)$.

Rimarco. È possibile risolvere l'equazione $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{2}$ esplicitamente. Infatti,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{2} \implies \frac{1}{x} = \frac{x^2}{4} \implies x^3 = 4 \implies x = \sqrt[3]{4}$$

e si verifica che $x = \sqrt[3]{4}$ è veramente soluzione di $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ mentre } \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \,.$$

Ora si vede subito che $\sqrt[3]{4} > 1$ e $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} = 2$, cioè $\sqrt[3]{4} \in (1, 2)$.