NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Test del 17.12.2007

1) Calcolare la parte reale, la parte immaginaria, il modulo del seguente numero complesso e indicare a quale punto del piano complesso corrisponde

$$3 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{6!} \cdot \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^{7!}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} \; .$$

2) Calcolare tutte le radici quadrate di

$$\sqrt{3} - i$$

nel campo complesso.

3) Determinare il carattere delle seguenti serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} \ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \ .$$

4) Dopo avere indicato il dominio della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\log\bigl(\sin(x)\bigr)}\right) \ ,$$

calcolarne la derivata.

5) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{|x| - 1}}$$

e disegnarne un grafico qualitativo.

Soluzioni:

1) **:** Scriviamo $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ in forma trigonometrica:

Il modulo è

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1\,,$$

mentre l'argomento φ soddisfa

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

perciò possiamo prendere $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$. Ora la formula di De Moivre implica

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{6\,!} &= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{6\,!} \\
&= \cos\left(-\frac{6\,!}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{6\,!}{4}\pi\right) = 1
\end{aligned}$$

perché $-\dfrac{6\,!}{4}\pi = -3\,!\cdot 5\cdot 6\cdot \pi$ è un moltiplo intero pari di π.

Similmente, il modulo di $\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}$ è 1 e come argomento possiamo prendere $\dfrac{\pi}{4}$, perciò

$$\begin{aligned}
\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^{7\,!} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{7\,!} \\
&= \cos\left(\frac{7\,!}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\,!}{4}\pi\right) \\
&= \cos\left(3\,!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \pi\right) + i\sin\left(3\,!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \pi\right) = 1\,.
\end{aligned}$$

Risulta che la parte reale, la parte immaginaria ed il modulo del numero complesso

$$3\cdot \frac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^{6\,!} \cdot \left(\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^{7\,!}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{3}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{3}{i} = -3i$$

sono rispettivamente 0, -3, 3, ed il punto corrispondente del piano complesso ha le coordinate $(0, -3)$.

2) : Per calcolare le radici quadrate di $\sqrt{3} - i$ nel campo complesso, cioè i numeri complessi z che soddisfano l'ugualità $z^2 = \sqrt{3} - i$, dobbiamo prima scrivere $\sqrt{3} - i$ in forma trigonometrica:

$$\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ e } \ \sin\varphi = -\frac{1}{2}\,, \ \text{perciò possiamo porre } \ \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

ed otteniamo

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Ora, se $z = r\big(\cos\psi + i\sin\psi\big)$ e $z^2 = \sqrt{3} - i$, allora la formula di De Moivre implica

$$r^2\big(\cos(2\,\psi) + i\sin(2\,\psi)\big) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

cioè $r^2 = 2$ e

$$\begin{aligned} 2\,\psi &= \varphi + 2\,k\,\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi\,, \ \text{ ossia} \\ \psi &= \frac{\varphi}{2} + k\,\pi = -\frac{\pi}{12} + k\,\pi \end{aligned}$$

per un k intero. Perciò le radici quadrate di $\sqrt{3} - i$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \pi\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ &= -\,z_1\,, \end{aligned}$$

poiché, "cos" e "sin" essendo funzioni periodiche con periodo 2π, per $k = 2$ riotteniamo z_1, poi per $k = 3$ riotteniamo z_2, e cosi via.

Rimarco. Possiamo andare anche oltre, calcolando esplicitamente

$$\cos\frac{\pi}{12}\,,\ \sin\frac{\pi}{12}\ \text{ e quindi }\ z_1\,,\ z_2\ = -z_1\,.$$

Infatti, usando le formule trigonometriche

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\,, \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

con $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, si ottengono

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\,,$$
$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\,,$$

cioè

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\,, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\,.$$

Risulta che le radici quadrate di $\sqrt{3} - i$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\,, \\ z_2 &= -\,z_1 \\ &= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\,. \end{aligned}$$

3) : Le due serie sono a termini positivi, perciò possiamo applicare alle ambedue il **criterio del rapporto** che afferma :

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è una serie tale che* $a_n > 0$ *per ogni* n *ed il limite* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *esiste, allora*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 &\implies \textit{la serie converge,}\\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 &\implies \textit{la serie diverge,}\\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 &\implies \textit{nulla si può concludere.}
\end{aligned}$$

Nel caso della serie con $a_n = \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}} &= \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n+1}\\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{1}{2}}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0\,,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 0 = 0 < 1\,.$$

Per il criterio del rapporto concludiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$ converge.

D'altra parte, nel caso della serie con $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1 ,$$

perciò la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ diverge.

4) **:** Il dominio della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\log\big(\sin(x)\big)}\right) ,$$

consiste da tutti i numeri reali x per quali

$$\sin x > 0 \quad \text{e} \quad \log\big(\sin(x)\big) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ \sin x \neq 1 ,$$

cioè

$$0 < \sin x < 1 .$$

In altre parole, il dominio di f è l'unione di $(0,\pi)$ con tutti i suoi traslati con moltipli interi pari di π :

$$\begin{aligned} &\ldots \cup \Big(-2\pi, -\pi\Big) \cup \Big(0,\pi\Big) \cup \Big(2\pi, 3\pi\Big) \cup \ldots \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(2k\pi, (2k+1)\pi\Big) . \end{aligned}$$

La funzione f è derivabile quale composizione delle funzioni derivabili

$$\arctan u , \quad \frac{1}{v} , \quad \log w , \quad \sin x$$

e la derivata di f si calcola usando la regola della catena e le formule note

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} , \ \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2} , \ (\log w)' = \frac{1}{w} , \ (\sin x)' = \cos x \ :$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\log\big(\sin(x)\big)}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{\Big(\log\big(\sin(x)\big)\Big)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x \\
&= -\,\frac{\cot x}{1+\log^2\big(\sin(x)\big)}\,.
\end{aligned}
$$

5) **:** La funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{|x|-1}}$ è definita per tutti i numeri reali x per quali

$$|x|-1\neq 0 \ \text{ e } \ \frac{x^2}{|x|-1}\geq 0$$

e questi sono $\big(-\infty,-1\big)\cup\big\{0\big\}\cup\big(1,+\infty\big)$.

Poiché f è pari, basta studiarla su $\big(1,+\infty\big)$.

Su questo intervallo

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \\
f'(x) &= \frac{\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\,x}{x-1} = \frac{x-2}{2\,(x-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

x	1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Così $x=1$ è asintoto verticale per f da destra, poi f è strettamente decrescente su $\big(1,2\big)$ e strettamente crescente su $\big(2,+\infty\big)$, avendo un punto di minimo in $x=2$.

Per la parità di f $x=-1$ è asintoto verticale per f da sinistra, f è strettamente decrescente su $\big(-\infty,-2\big)$ e strettamente crescente su $\big(-2,-1\big)$, avendo un altro punto di minimo in $x=-2$.

Finalmente, $x=0$ è un punto isolato nel domenio di f.

Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f.