

NOME: ..... MATRICOLA: .....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010  
Analisi Reale e Complessa, Test del 04.12.2009

1) Verificare o smentire il passaggio al limite sotto il segno di integrale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{n} dx = \int_0^{\pi/2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{n} \right) dx .$$

2) Siano  $0 < a < b$ . Applicando il teorema di Fubini alla funzione

$$[0, +\infty) \times [a, b] \ni (x, y) \mapsto e^{-xy} \in \mathbb{R}$$

si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx .$$

3) Definiamo la funzione differenziabile  $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tramite

$$\varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) .$$

(1) Si trovi  $\varphi^{-1}(E)$  per il disco unit  chiuso senza il centro

$$E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u^2 + v^2 \leq 1\} .$$

(2) Si verifichi che

$$|E| \neq \int_{\varphi^{-1}(E)} |\det J_\varphi(x, y)| dx dy .$$

(3) Si spieghi, perch  in questa situazione la formula di cambiamento di variabili non funziona.

### Soluzioni:

1) : Le funzioni

$$f_n : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{n} \in [0, +\infty), \quad n \geq 1$$

sono continue e convergono puntualmente alla funzione  $f \equiv 0$ . Poi

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x} \frac{\sqrt{x}}{n} = \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad n \geq 1$$

e la funzione  $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \rightarrow [0, +\infty)$  è integrabile :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^{\pi/2} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} < +\infty.$$

Cosicché il teorema della convergenza dominata implica che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx = 0.$$

2) : Applichiamo il teorema di Tonelli alla funzione positiva continua  $e^{-xy}$ , integrando prima rispetto ad  $x$  e poi rispetto ad  $y$ :

$$\begin{aligned} \iint_{[0, +\infty) \times [a, b]} e^{-xy} dx dy &= \int_a^b \left( \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left( -\frac{e^{-xy}}{y} \Big|_0^{+\infty} \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y} dy \\ &= \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

In particolare  $e^{-xy}$  è integrabile sulla semistriscia  $[0, +\infty) \times [a, b]$ .

Applichiamo ora il teorema di Fubini, integrando prima rispetto ad  $y$  e poi rispetto ad  $x$ :

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,+\infty) \times [a,b]} e^{-xy} dx dy &= \int_0^{+\infty} \left( \int_a^b e^{-xy} dy \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left( - \frac{e^{-xy}}{x} \Big|_a^b \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx .
\end{aligned}$$

Risulta che

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} .$$

3) : Per (1) :

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(E) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 \leq 1\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \leq 1\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < (x^2 + y^2)^2 \leq 1\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \\
&= E .
\end{aligned}$$

Per (2) :

$|E|$  è l'area del disco unita chiuso senza il centro, cioè l'area  $\pi$  del disco unita.

Per calcolare

$$\iint_{\varphi^{-1}(E)} |\det J_\varphi(x, y)| dx dy$$

calcoliamo prima  $\det J_\varphi(x, y)$  :

$$\begin{aligned}
\det J_\varphi(x, y) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy) & \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2) .
\end{aligned}$$

Perciò, usando le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\det J_{\varphi}(x, y)| dx dy &= \iint_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} 4(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4\rho^2 \rho d\theta d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 4\rho^3 d\rho \\ &= 2\pi \neq \pi = |E|. \end{aligned}$$

Per (3) :

La formula di cambiamento di variabili non ha funzionato perché la funzione  $\varphi$  non è iniettiva. Infatti,  $(x, y)$  e  $(-x, -y)$  hanno la stessa immagine  $(x^2 - y^2, 2xy)$  ed ogni punto di  $E$  è l'immagine di due punti di  $E$  :

Per ogni  $(u, v) \in E$  il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$$

ha esattamente due soluzioni :

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} \\ y = \frac{v}{2x} \end{cases} \quad \text{se } v \neq 0,$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{u} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{se } v = 0, u > 0,$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \sqrt{-u} \end{cases} \quad \text{se } v = 0, u < 0.$$

Perciò, passando da  $E$  a  $\varphi^{-1}(E)$ , ricopriamo due volte il disco unita senza il centro e questo spiega perché  $\iint_{\varphi^{-1}(E)} |\det J_{\varphi}(x, y)| dx dy$  è il doppio di  $|E|$ .