NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2010/2011
Analisi Reale e Complessa, Test del 05.02.2011

1) Sia $0 \leq \alpha < 1$ e definiamo la funzione olomorfa z^α nel dominio

$$\left\{ \rho e^{i\theta} \, ; \, \rho > 0 \, , -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

tramite $\left(\rho e^{i\theta}\right)^\alpha := \rho^\alpha e^{i\alpha\theta}$ $\left(\text{per esempio, } (-1)^\alpha = e^{i\pi\alpha} \text{ e } i^\alpha = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\right)$.

Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^2)} \, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{r \to +\infty \\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^\alpha(1+x^2)} \, \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{x^\alpha(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \right)$$

usando il teorema dei residui per una famiglia adatta di curve chiuse regolari a tratti nel semipiano superiore. Poi, confrontando gli integrali

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^\alpha(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \, ,$$

si calcoli

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \, .$$

2) Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Si dimostri che f si annulla in ogni punto di minimo locale $z_o \in D$ della funzione

$$D \ni z \longmapsto |f(z)| \in [0 \, , +\infty) \, .$$

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false e si giustifichi la risposta :

1) Se $D \subset \mathbb{C}$ è un dominio ed $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica che si annula in un sottoinsieme $S \subset D$ avente punto di accumulazione in D, allora u deve annullarsi identicamente.

2) Se $D \subset \mathbb{C}$ è un dominio ed $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica che si annula in un sottoinsieme aperto non vuoto di D, allora u deve annullarsi identicamente.

Soluzioni:

1) **:** Indichiamo

$$f(z) := \frac{1}{z^\alpha(1+z^2)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Big(\{i\}\cup\big(i(-\infty\,,0]\big)\Big)\,.$$

Allora f è una funzione meromorfa con un polo semplice in i ed il suo residuo in i è

$$\operatorname*{Res}_i(f) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^\alpha(1+z^2)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z^\alpha(z+i)}$$

$$= \frac{1}{i^\alpha 2\,i} = \frac{1}{2\,i\,e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}}\,.$$

D'altro canto indichiamo, per ogni $\rho > 0$, con $\partial^+ U_\rho^+(0)$ e $\partial^- U_\rho^+(0)$ il semicerchio

$$\big\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z| = \rho\,,\mathrm{Im}z \geq 0\big\}$$

orientato contro il senso delle lancette rispettivamente nel senso delle lancette :

$$\partial^+ U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t \longmapsto \rho e^{it}\in\mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t \longmapsto \rho e^{i(\pi-t)} = -\rho e^{-it}\in\mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0<\varepsilon<1<r$ e consideriamo la curva chiusa $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,,-\varepsilon]$,
il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,
il segmento $[\varepsilon\,,r]$,
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\operatorname*{Res}_i(f) = \frac{\pi}{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}}\,,$$

quindi

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}}\,,$$

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ora la stima

$$\begin{aligned}
\Bigg| \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \Bigg| &\le \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \left|\frac{1}{z^\alpha(1+z^2)}\right| \mathrm{d}|z| \\
&\le \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1}{r^\alpha(r^2-1)}\,\mathrm{d}|z| = \frac{r\pi}{r^\alpha(r^2-1)} \\
&\le \frac{\pi}{r^\alpha(r-1)}\,, \qquad r > 1
\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Similmente, poiché

$$\begin{aligned}
\Bigg| \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \Bigg| &\le \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \left|\frac{1}{z^\alpha(1+z^2)}\right| \mathrm{d}|z| \\
&\le \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon^2)}\,\mathrm{d}|z| = \frac{\varepsilon\pi}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon^2)} \\
&= \frac{\varepsilon^{1-\alpha}\pi}{1-\varepsilon^2}\,, \qquad 0 < \varepsilon < 1\,,
\end{aligned}$$

abbiamo anche

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Risulta

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, \mathrm{d}x \right) \qquad (*) \\
&= \frac{\pi}{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}} \, .
\end{aligned}$$

Per calcolare

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, \mathrm{d}x$$

facciamo presente che

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, \mathrm{d}x \overset{x=-t}{=} \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{(-t)^{\alpha}(1+t^2)}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{e^{i\pi\alpha}} \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{t^{\alpha}(1+t^2)}\, \mathrm{d}t \, .$$

Usando ora (*) deduciamo

$$\left(1+\frac{1}{e^{i\pi\alpha}}\right) \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}}$$

e concludiamo che

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi\, e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}}{e^{i\pi\alpha}+1} = \frac{\pi}{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} + e^{\frac{-i\pi\alpha}{2}}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \, . \qquad (**)$$

Rimarco 1. Per $\alpha = 0$ otteniamo il risultato noto

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \, .$$

Anche per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ otteniamo un risultato già incontrato :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \overset{t=\sqrt{x}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \overset{(**)}{=} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

si calcola di solito usando la primitiva

$$\int \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\,t+1\big)+\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\,t-1\big)}{2\sqrt{2}} + C$$

e la formula fondamentale del calcolo integrale.

Rimarco 2. Il punto 0 non è un polo della funzione olomorfa

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z^2)}\ ,$$

è un punto singolare non isolato. Ciò nonostante si può usare il Lemma del piccolo cerchio sotto la forma seguente :

LEMMA DEL PICCOLO CERCHIO: *Siano*

- $w \in \mathbb{C}\,, r > 0\,, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$,
- f *una funzione complessa continua definita sul settore circolare*
$$S_{t_1,t_2} = \{w + \varepsilon e^{it}\,;\, 0 < \varepsilon < r\,, t_1 \leq t \leq t_2\}\,,$$
- Γ_ε *l'arco* $[t_1\,, t_2] \ni t \longmapsto w + \varepsilon e^{it}$ *ove* $0 < \varepsilon < r$.

Se

$$\lim_{S_{t_1,t_2}\ni z\to w} (z-w)f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$$

allora

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (t_2-t_1)\,i\,\lambda\ .$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che la condizione

$$\lim_{S_{t_1,t_2}\ni z\to w} (z-w)f(z) = \lambda$$

significa

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \sup_{z\in\Gamma_\varepsilon} \big|(z-w)f(z)-\lambda\big| = 0\ . \qquad (***)$$

Ora, usando l'eguaglianza

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\varepsilon\, e^{it}}\,\varepsilon\, e^{it}\, i\,\mathrm{d}t = (t_2-t_1)\,i\ ,$$

deduciamo

$$\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z - (t_2-t_1)\,i\,\lambda\Big| &= \Big|\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\lambda}{z-w}\,\mathrm{d}z\Big| \\
&= \Big|\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z-w)f(z)-\lambda}{z-w}\,\mathrm{d}z\Big| \\
&\leq \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\big|(z-w)f(z)-\lambda\big|}{\varepsilon}\,\mathrm{d}|z| \\
&\leq 2\pi \sup_{z\in\Gamma_\varepsilon} \big|(z-w)f(z)-\lambda\big|\ .
\end{aligned}$$

Tenendo conto di (***) risulta

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \Big|\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z - (t_2-t_1)\,i\,\lambda\Big| = 0\ .$$

■

Se f è una funzione meromorfa su un intorno di w ed ha polo semplice in w allora le condizioni del Lemma del piccolo cerchio sono soddisfatte per qualsiasi $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$ con

$$\lambda = \lim_{S_{t_1,t_2}\ni z\to w} (z-w)f(z) = \operatorname*{Res}_w(f)\ .$$

Nella situazione dell'esercizio 1 il Lemma del piccolo cerchio si applica con $w=0\,, t_1=0\,, t_2=\pi\,, \lambda=0$:

$$\big|z\,f(z)\big| = \frac{|z|^{1-\alpha}}{\big|1+z^2\big|} \leq \frac{|z|^{1-\alpha}}{1-|z|^2} \longrightarrow 0 \ \text{ per } \ |z|\to 0\,.$$

2) **:** Supponiamo che $z_o \in D$ è un punto di minimo locale di

$$D \ni z \longmapsto |f(z)| \in [0\,,+\infty)\,.$$

e $f(z_o) \neq 0$, cioè che esiste un $r > o$ tale che il disco aperto $U_r(z_o) := \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_o| < r \big\}$ è contenuto in D e

$$0 < |f(z_o)| \leq |f(z)|\,, \qquad z \in U_r(z_o)\,.$$

Ma allora z_o è un punto di massimo per il modulo della funzione olomorfa

$$U_r(z_o) \ni z \longmapsto \frac{1}{f(z)}$$

e per il principio del massimo risulta che questa funzione è costante. In altre parole abbiamo

$$f(z) = f(z_o)\,, \qquad z \in U_r(z_o)\,.$$

Possiamo adesso applicare il principio di identità alla funzione olomorfa f e concludere che f dev'essere costante, in contraddizione con l'ipotesi fatta su f.

3) **:** **1) è falsa:** basta prendere una funzione olomorfa non costante

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}\,,\; f = u + iv\,,$$

tale che D intesechi $\mathbb{R}$ ed f prendi valori reali nei punti di $D \cap \mathbb{R}$ (per esempio, possiamo prendere $f(z) = z$ oppure $f(z) = e^z$); allora la funzione armonica v non è costante, in particolare non si annulla identicamente, ma si annulla in $S = D \cap \mathbb{R}$ ed ogni punto di S è punto di accumulazione (nel caso di $f(z) = z$ abbiamo $v(x + iy) = y$, mentre nel caso di $f(z) = e^z$ abbiamo $v(x + iy) = e^x \sin y$).

2) invece è vera. La verificheremo in due tappe.

Prima tappa.

Assumiamo prima addizionalmente che il dominio D è semplicemente connesso. Allora u ha un'armonica coniugata v, cioè esiste una funzione armonica $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che la funzione $f = u + iv$ sia olomorfa. Supponiamo che u si annulla in un disco

$$U_r(z_o) := \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_o| < r \big\}\,, \qquad z_o \in \mathbb{C}\,, r > 0$$

contenuto in D.

Dimostrazione usando le equazioni di Cauchy-Riemann.

Anche la funzione v dev'essere costante in $U_r(z_o)$:

> Poiché abbiamo per ogni $x + iy \in U_r(z_o)$
>
> $$\frac{\partial v}{\partial x}(x+iy) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) = 0\,,$$
> $$\frac{\partial v}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) = 0\,,$$
>
> deduciamo che v è costante in $U_r(z_o)$.

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ il valore costante di v . Allora $f(z) = \lambda i$ per ogni $z \in U_r(z_o)$ ed applicando il principio d'identità per le funzioni olomorfe deduciamo che f è identicamente uguale a λi in tutto D . Cosicché la parte reale u di f si annulla identicamente in D .

Dimostrazione usando il teorema dell'applicazione aperta.

L'immagine $f\big(U_r(z_o)\big) \neq \emptyset$ è contenuta in $i\mathbb{R}$ e perciò non ha punti interni. Per il teorema dell'applicazione aperta risulta che f è costante in D . Ora $f\big(U_r(z_o)\big) \subset i\mathbb{R}$ implica $f(z) = \lambda i\,, z \in D$, per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$. Cosicché la parte reale u di f si annulla identicamente in D .

Seconda tappa.

Consideriamo adesso il caso di un dominio D generale e definiamo

$$D_o := \left\{ z \in D\,;\ \begin{array}{l} \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } U_r(z) \subset D \\ \text{ed } u \text{ si annulla in } U_r(z) \end{array} \right\}$$

D_o è chiaramente aperto. Mostriamo che è anche chiuso in D:

> Sia $D_o \ni z_n \longrightarrow z \in D$ e scegliamo un $r > 0$ soddisfacente $U_r(z) \subset D$. Allora esiste un intero $n \geq 1$ con $z_n \in U_r(z)$. Poiché $z_n \in D_o$, possiamo trovare un $r_n > 0$ tale che
>
> $$U_{r_n}(z_n) \subset U_r(z) \text{ ed } u \text{ si annulla in } U_{r_n}(z_n)\,.$$
>
> Ma $U_r(z)$ è semplicemente connesso, quindi per la prima tappa della dimostrazione u si annulla in $U_r(z)$ e deduciamo che $z \in D_o$.

Poiché D è connesso e, per l'ipotesi su u , $D_o \neq \emptyset$, concludiamo che $D_o = D$, ossia u si annulla in ogni punto di D .