NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2012/2013
Analisi Reale e Complessa, Test del 14.01.2013

1) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}.$$

Suggerimento: estendere la funzione integranda ad una funzione olomorfa su un opportuno aperto connesso di $\mathbb{C}$ contenente $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) Sia $r \geq 0$ un numero reale positivo e sia D_r il disco chiuso di centro 0 e raggio r. Sia $f : \mathbb{C}\setminus D_r \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

a) Mostrare che esistono successioni a valori complessi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus D_r$.

b) Dimostrare che se α è un numero reale tale che $\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$ esiste finito ed è non nullo, allora $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dedurne che un polinomio non costante non può ammettere un logaritmo olomorfo in $\mathbb{C}\setminus D_r$.

c) Mostrare che se per nessun $\alpha \in \mathbb{Z}$ il limite $\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$ esiste finito e non nullo, allora la chiusura dell'immagine di f è $\mathbb{C}$.
Suggerimento: Mostrare che in questo caso deve essere $a_n \neq 0$ per infiniti n.

3) Sia K la corona circolare di centro 0, raggio interno 1 e raggio esterno 3. Sia ∂K il bordo di K con l'orientazione indotta da quella di K (cioè ∂K è unione della circonferenza C_3 di centro 0 e raggio 3 e della circonferenza C_1 di centro 0 e raggio 1, C_3 è orientata in senso antiorario e C_1 in senso orario).

Calcolare:

I) $$\int_{\partial K} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz \ ;$$

II) $$\int_{\partial K} \frac{3\cos(z)-5}{(z-2)(e^{iz}-3)} dz \ .$$

Soluzioni:

Esercizio 1) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}.$$

Suggerimento: estendere la funzione integranda ad una funzione olomorfa su un opportuno aperto connesso di $\mathbb{C}$ contenente $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Soluzione esercizio 1). Come suggerito estendiamo innanzitutto la funzione integranda ad una funzione olomorfa su un aperto connesso di $\mathbb{C}$ contenente $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Sia $s := \{ib :\ b \leq 0\} \subset \mathbb{C}$ la semiretta reale negativa. Su $\mathbb{C}\setminus s$ è definito un logoritmo olomorfo $\log_s(z)$ di z che coincide con il logaritmo reale sulla semiretta reale positiva. Esplicitamente

$$log_s(z) := \ln|z| + i\Theta_s(z)$$

con $-\pi/2 < \Theta_s(z) < 3/2\pi$. Quindi su $\mathbb{C}\setminus s$ esiste una radice cubica di z olomorfa data esplicitamente da

$$z^{1/3} := e^{1/3(\log|z|+i\Theta_s(z))} = |z|^{1/3}e^{i\Theta_s(z)/3}$$

con $-\pi/2 < \Theta_s(z) < 3/2\pi$. Si noti che per z reale e negativo $z^{1/3}$ non è un numero reale e quindi la funzione $z^{1/3}$ non è un'estensione della radice cubica reale definita su $\mathbb{R}$.

La funzione

$$f(z) := \frac{1}{z^{1/3}(z^4+5z^2+4)}$$

è quindi un estensione meromorfa della funzione integranda a $\mathbb{C}\setminus s$. Siccome $z^4+5z^2+4 = (z^2+1)(z^2+4)$ la funzione f ha poli semplici in i e $2i$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus(s\cup\{i\}\cup\{-i\})$. Notiamo che se x è reale positivo si ha

$$f(-x) = e^{-i\pi/3}\frac{1}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)} = e^{-i\pi/3}f(x).$$

Passiamo ora a considerare l'integrale improprio. Siccome $x^{1/3}(x^4+5x^2+4)$ è asintotica a $4x^{1/3}$ per $x \to 0$ ed è asintotica a $x^{13/3}$ per $x \to +\infty$ l'integrale improprio è convergente e

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)} = \lim_{R\to+\infty} \int_{1/R}^{R} \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}.$$

Per calcolare il limite usiamo il metodo dei residui integrando la 1-forma $f(z)dz$ lungo il cammino

$$\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R}$$

dove

- $\gamma_{1,R}$ è il segmento che va da $1/R$ a R,
- $\gamma_{2,R}$ è la semicirconferenza $\{x+iy\ : x^2+y^2 = R\ , y \geq 0\}$ percorsa in senso antiorario,
- $\gamma_{3,R}$ è il segmento che va da $-R$ a $-1/R$,
- $\gamma_{2,R}$ è la semicirconferenza $\{x+iy\ : x^2+y^2 = 1/R\ , y \geq 0\}$ percorsa in senso orario.

Se $R > 2$ per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,2i)),$$

ma

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_{j,R}} f(z)dz\ ,$$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz = \int_{1/R}^{R} \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz &= \int_{-R}^{-1/R} e^{-i\pi/3} \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)} \\ &= e^{-i\pi/3} \int_{1/R}^{R} \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}\ .\end{aligned}$$

Quindi

$$(1+e^{-i\pi/3})\int_{1/R}^{R}\frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}+\sum_{j=2,4}\int_{\gamma_{j,R}}f(z)dz$$
$$=2\pi i(Res(f,i)+Res(f,2i))\ .$$

Quindi se mostriamo che per $j=2$ e $j=4$ si ha $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{j,R}}f(z)dz=0$ otterremo

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}=\lim_{R\to+\infty}\int_{1/R}^{R}\frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}=$$

$$=\frac{2\pi i(Res(f,i)+Res(f,2i))}{(1+e^{-i\pi/3})}\ .$$

In effetti si ha $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{\gamma_{2,R}}f(z)dz=0$ perché

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}}f(z)dz\right|\le\pi R\sup\{|f(z)|:z\in\gamma_{2,R}\}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty}\pi R\sup\{|f(z)|:z\in\gamma_{2,R}\}=\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi R}{R^{13/3}}=0;.$$

Inoltre $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{\gamma_{4,R}}f(z)dz=0$ perché

$$|\int_{\gamma_{4,R}}f(z)dz|\le\frac{\pi}{R}\sup\{|f(z)|:z\in\gamma_{4,R}\}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{R}\sup\{|f(z)|:z\in\gamma_{4,R}\}=\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{4\ R^{2/3}}=0\ .$$

Quindi abbiamo

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)}=\frac{2\pi i(Res(f,i)+Res(f,2i))}{(1+e^{-i\pi/3})}\ .$$

e rimangono da calcolare i due residui.

Siccome i e $2i$ sono poli semplici per f abbiamo

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{z^{1/3}(z^4+5z^2+4)}(z-i) = \left(\frac{1}{z^{1/3}(z+i)(z^2+4)}\right)_{z=i} =$$

$$= \frac{1}{e^{i\pi/6}(2i)(3)} = \frac{1}{6ie^{i\pi/6}}$$

e

$$Res(f,2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{z^{1/3}(z^4+5z^2+4)}(z-2i) = \left(\frac{1}{z^{1/3}(z+2i)(z^2+1)}\right)_{z=2i} =$$

$$= \frac{1}{2^{1/3}e^{i\pi/6}(4i)(-3)} = -\frac{1}{2^{1/3}12ie^{i\pi/6}} \ .$$

In conclusione

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/3}(x^4+5x^2+4)} = \frac{2\pi i}{(1+e^{-i\pi/3})}\left(\frac{1}{6ie^{i\pi/6}} - \frac{1}{2^{1/3}12ie^{i\pi/6}}\right)$$

$$\frac{2\pi}{e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6}}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2^{1/3}12}\right) = \frac{2\pi}{\cos(\pi/6)}\left(\frac{2^{4/3}-1}{2^{1/3}12}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2^{4/3}-1}{2^{1/3}12}\right) \ .$$

Esercizio 2) Sia $r \geq 0$ un numero reale positivo e sia D_r il disco chiuso di centro 0 e raggio r. Sia $f : \mathbb{C} \setminus D_r \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

a) Mostrare che esistono successioni a valori complessi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus D_r$.

b) Dimostrare che se α è un numero reale tale che $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$ esiste finito ed è non nullo, allora $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dedurne che un polinomio non costante non può ammettere un logaritmo olomorfo in $\mathbb{C} \setminus D_r$.

c) Mostrare che se per nessun $\alpha \in \mathbb{Z}$ il limite $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$ esiste finito e non nullo, allora la chiusura dell'immagine di f è $\mathbb{C}$.
Suggerimento: Mostrare che in questo caso deve essere $a_n \neq 0$ per infiniti n.

Soluzione esercizio 2). **a)** Sia $R > r$ un numero reale. Sia $C_{r,R}$ la corona circolare aperta di raggio interno r e raggio esterno R. La funzione f è in particolare una funzione olomorfa su $C_{r,R}$. Per la teoria delle funzioni olomorfe sulle corone circolari sappiamo che esistono successioni a valori complessi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ per ogni $z \in C_{r,R}$. Inoltre i coefficienti a_n e b_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \, , b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) z^{n-1} dz$$

dove ρ è un qualsiasi reale compreso tra r e R e γ_ρ è la circonferenza di centro 0 e raggio ρ percorsa in senso antiorario. In particolare, al crescere di R i coefficienti a_n e b_n non cambiano e, siccome ogni $z \in \mathbb{C} \setminus D_r$ appartiene a $C_{r,R}$ per qualche R, si ha $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus D_r$.

Alternativamente si poteva osservare che, detto Δ_r il disco aperto di centro 0 e raggio r, la funzione $k : \Delta_{1/r} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da $k(z) := f(1/z)$

è una funzione olomorfa in $\Delta_{1/r} \setminus \{0\}$. Quindi l'origine è una singolarità isolata per k. Per la teoria delle singolarità isolate di funzioni olomorfe esistono esistono numeri complessi $\{c_n\}$ per $n \in \mathbb{Z}$ e $\{d_n\}$ tali che $f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{z^n}$ per ogni z nell'interno di $(D_{1/r} \setminus \{0\})$. Di conseguenza ricomponendo con $z \mapsto 1/z$ otteniamo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^n$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus D_r$.

b) Mostriamo innanzitutto che un tale α è intero. Mostriamo che α é intero in due modi leggermente diversi.

$\alpha \in \mathbb{Z}$ **primo metodo:** Se per qualche α limite $\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$ esiste finito, allora preso un intero $n_0 > \alpha$ si ha

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^{n_0}} = 0$$

e, posto come prima $k(z) := f(1/z)$ per $z \in \Delta_{1/r} \setminus \{0\}$, si ha

$$\lim_{z\to 0} k(z)\ z^{n_0} = 0\ .$$

Quindi l'origine è una singolarità isolata eliminabile di $k(z)\ z^{n_0}$ e $k(z)\ z^{n_0}$ ha un'estensione olomorfa in $\Delta_{1/r}$ che si annulla in 0.

Sia $d > 0$ l'ordine di annullamento in 0 di questa estensione, allora

$$\lim_{z\to 0} \frac{k(z)\ z^{n_0}}{z^d}$$

esiste finito e non nullo. Siccome $k(1/z) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus D_r$ allora

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^{n_0-d}} = \lim_{z\to 0} \left| f(1/z)\ z^{n_0-d} \right| = \left| \lim_{z\to 0} \frac{k(z)\ z^{n_0}}{z^d} \right|$$

esiste finito e non nullo. Infine facilmente si conclude che α coincide con l'intero $n_0 - d$. Infatti

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha} = \lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^{n_0-d}|z|^{\alpha-(n_0-d)}}$$

e l'ultimo limite vale 0 se $\alpha > n_0 - d$ e vale $+\infty$ se $\alpha < n_0 - d$.

$\alpha \in \mathbb{Z}$ **secondo metodo:** dobbiamo mostrare che se $\alpha \notin \mathbb{Z}$ allora $\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$ non può esistere finito e non nullo. Per ogni naturale strettamente positivo n poniamo $a_{-n} := b_n$. In questo modo abbiamo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus D_r$. Sia $\alpha \notin \mathbb{Z}$ e sia $[\alpha]$ la parte intera di α cioè il più grande intero più piccolo di α. Possiamo scrivere $f(z) = \sum_{n=[\alpha]}^{-\infty} a_n z^n + \sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} a_n z^n$, quindi

$$\frac{|f(z)|}{|z|^\alpha} = \left| \frac{\sum_{n=[\alpha]}^{-\infty} a_n z^n}{|z|^\alpha} + \frac{\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} a_n z^n}{|z|^\alpha} \right| . \qquad (*)$$

Abbiamo

$$\frac{|\sum_{n=[\alpha]}^{-\infty} a_n z^n|}{|z|^\alpha} = \frac{|\sum_{n=[\alpha]}^{-\infty} a_n z^n|}{|z|^{[\alpha]}} \frac{1}{|z|^{\alpha-[\alpha]}} = \frac{|\sum_{n=[\alpha]}^{-\infty} a_n z^{n-[\alpha]}|}{|z|^{\alpha-[\alpha]}} .$$

La serie $\sum_{n=[\alpha]}^{-\infty} a_n z^{n-[\alpha]}$ è una serie di potenze di gradi tutti negativi convergente in $\mathbb{C} \setminus D_r$ ad una funzione olomorfa $h(z)$, quindi $\lim_{z\to\infty} h(z) = \lim_{z\to 0} h(1/z) = a_{[\alpha]}$. Inoltre siccome α non è intero si ha $\alpha - [\alpha] > 0$ quindi

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|\sum_{n=[\alpha]}^{-\infty} a_n z^n|}{|z|^\alpha} = |a_{[\alpha]}| \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|z|^{\alpha-[\alpha]}} = 0 .$$

Per l'uguaglianza $(*)$ il limite $\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$ esiste finito e non nullo se e solo se lo stesso vale per il limite $\lim_{z\to\infty} \frac{|\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} a_n z^n|}{|z|^\alpha}$. Abbiamo

$$\frac{|\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} a_n z^n|}{|z|^\alpha} = |z|^{[\alpha+1]-\alpha} | \sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} a_{n-([\alpha]+1)} z^n | .$$

La serie $\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} a_{n-([\alpha]+1)} z^n$ è una serie di potenze di gradi tutti positivi ed è convergante su $\mathbb{C} \setminus D_r$ quindi converge ad una funzione $g(z)$ olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Per il teorema di Liuville $g(z)$ è costante oppure $g(z)$ è illimitata in ogni intorno di ∞.

Se $g(z)$ è la funzione costante nulla si ha

$$\lim_{z\to\infty}\frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}=\lim_{z\to\infty}\frac{|\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty}a_nz^n|}{|z|^\alpha}=0\ .$$

Se $g(z)$ è la funzione costante a non nulla si ha

$$\lim_{z\to\infty}\frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}=\lim_{z\to\infty}\frac{|\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty}a_nz^n|}{|z|^\alpha}=\lim_{z\to\infty}a|z|^{[\alpha+1]-\alpha}=+\infty\ .$$

Infine se $g(z)$ è una funzione non limitata in ogni intorno di ∞ anche

$$\frac{|\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty}a_nz^n|}{|z|^\alpha}=|z|^{[\alpha+1]-\alpha}||g(z)|$$

lo è e quindi non può esistere finito il limite

$$\lim_{z\to\infty}\frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}\ .$$

Conclusione b)**:** mostriamo ora che un polinomio $p(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$ di grado $n\geq 1$ non può ammettere logaritmo olomorfo in $\mathbb{C}\setminus D_r$. Se lo ammattesse lo ammetterebbe anche su $\mathbb{C}\setminus D_R$ con $R>r$. Quindi possiamo supporre che D_r contenga tutte le soluzioni di $p(z)=0$. Siccome $p(z)$ non si annulla su $\mathbb{C}\setminus D_R$ se $p(z)$ ammettesse logaritmo olomorfo allora, per ogni naturale m, il polinomio $p(z)$ ammetterebbe una radice $m-$esima olomorfa $q:\mathbb{C}\setminus D_R\to\mathbb{C}$. Considerando un m che non divide n otterremmo

$$\lim_{z\to\infty}\frac{|q(z)|}{|z|^{n/m}}=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{|q(z)|^n}{|z|^n}\right)^{1/m}=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{|p(z)|}{|z|^n}\right)^{1/m}=|a_n|^{1/m}$$

che contraddice quanto appena dimostrato.

c) Prima soluzione: innanzitutto che ci sono infiniti $n\geq 0$ per cui $a_n\neq 0$. Se sono finiti indichiamo con n_0 il massimo n per cui $a_n\neq 0$.

Abbiamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$$

e

$$\lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n} = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ z^n = 0$$

(l'ultima uguaglianza segue dal fatto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ converge in $\mathbb{C} \setminus D_R$, quindi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ converge in $\Delta_{1/R} \setminus \{0\}$ ed essendo una serie di potenze positive deve convergere anche in 0). Perciò

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^{n_0}} = \lim_{z\to\infty} \frac{|\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n|}{|z|^{n_0}} = |a_{n_0}| \neq 0 \ .$$

Quindi esistono infiniti n per cui $a_n \neq 0$.

Per concludere l'esercizio basta osservare che l'immagine della funzione f coincide con l'immagine della funzione $k : \Delta_{1/R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da $k(z) := f(1/z)$. la funzione k ha una singolarità isolata in 0 e il relativo sviluppo in serie bilatera è dato da

$$k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.$$

Siccome $a_n \neq 0$ per infiniti n la funzione k ha una singolarità essenziale in 0, quindi l'immagine di k e quella di f sono dense in $\mathbb{C}$.

Seconda soluzione: la funzione $k : \Delta_{1/R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da $k(z) := f(1/z)$ ha la stessa immagine di f e ammette una singolarit'a isolata in 0. Siccome immagini di funzioni olomorfe con singolarità essenziali sono dense in $\mathbb{C}$ basta mostrare che k ha una singolarità essenziale in 0. Se k avesse un polo o una singolarità eliminabile in 0, allora esisterebbe un intero n tale che il limite

$$\lim_{z\to 0} k(z) z^n = a$$

con $a \in \mathbb{C}$ non nullo. Di conseguenza sarebbe

$$\lim_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^n} = \lim_{z\to 0} |k(z) z^n| = |a| \neq 0;$$

contro la nostra ipotesi.

Esercizio 3) Sia K la corona circolare di centro 0, raggio interno 1 e raggio esterno 3. Sia ∂K il bordo di K con l'orientazione indotta da quella di K (cioè ∂K è unione della circonferenza C_3 di centro 0 e raggio 3 e della circonferenza C_1 di centro 0 e raggio 1, C_3 è orientata in senso antiorario e C_1 in senso orario).

Calcolare:

I) $$\int_{\partial K} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz \ ;$$

II) $$\int_{\partial K} \frac{3\cos(z)-5}{(z-2)(e^{iz}-3)} dz \ .$$

Soluzione esercizio 3) **I**) Per Gauss-Green abbiamo

$$\int_{\partial K} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz$$
$$= \int_{C_3} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz - \int_{C_1} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz$$

(qui sottointendiamo che le circonferenze C_R sono percorse in senso antiorario). Siccome i poli di $\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)}$ sono $1/2$ e le radici quarte di $-16i$ esse sono tutte contenute nel cerchi delimitato da C_3. Quindi, ancora per Gauss-Green, per ogni reale $R > 3$, si ha

$$\int_{C_3} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz = \int_{C_R} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz$$

e di conseguenza

$$\int_{C_3} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz$$

ma $\left| \int_{C_R} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} \right| \leq \pi R \frac{1}{(R-1/2)(R^4-16)}$ quindi

$$\int_{C_3} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz = 0.$$

Inoltre, siccome $1/2$ è l'unico punto singolare della funzione nel cerchio delimitato da C_1, per il teorema dei residui, si ha

$$\int_{C_1} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz \; = 2\pi i \; Res\left(\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)}, 1/2\right) .$$

Siccome $1/2$ è un polo semplice otteniamo

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)}, 1/2\right) &= \left(\frac{1}{(z^4+16i)}\right)_{|z=1/2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{16}+16i} = \frac{16}{1+256i} = \frac{16(1-256i)}{257} . \end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz &= -\int_{C_1} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z^4+16i)} dz \\ &= -2\pi i \frac{16(1-256i)}{257} \\ &= \frac{32\pi(-256-i)}{257} . \end{aligned}$$

II) Poniamo $f(z) := \dfrac{3\cos(z)-5}{(z-2)(e^{iz}-3)}$. Essendo un rapporto tra funzioni olomorfe f ammette solo singolarità isolate non essenziali e queste sono il esattamente gli zeri del denominatore. Nel nostro caso i punti singolari di f sono $\tilde{z}=2$ e le soluzioni dell'equazione $e^{iz}-3=0$, cioè i numeri della forma $z_k = 2k\pi - i\ln(3)$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Siccome $-2 < 3\cos(2)-5 \neq 0$ la singolarità $\tilde{z}=2$ è un polo di ordine 1. Siccome la derivata $\dfrac{d}{dz}(e^{iz}-3) = i\,e^{iz}$ non si annulla mai, le singolarità z_k sono poli di ordine 1 oppure sono singolarità eliminabili e questo caso si verifica se e solo se $3\cos(z_k)-5=0$.

Per la formula di Eulero

$$3\cos(z)-5 = \frac{3e^{iz}+3e^{-iz}-10}{2} .$$

Se $z = z_k$ abbiamo $e^{iz_k} = 3$ e $e^{-iz_k} = 1/3$. Quindi

$$3\cos(z_k) - 5 = \frac{9 + 1 - 10}{2} = 0\,.$$

Siccome $2 \in K$, per il teorema dei residui abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \frac{3\cos(z) - 5}{(z-2)(e^{iz} - 3)}\, dz &= 2\pi i Res(f, 2) = 2\pi i\, \frac{3\cos(2) - 5}{e^{2i} - 3} \\
&= 2\pi i\, \frac{3e^{i2} + 3e^{-i2} - 10}{2\,(e^{2i} - 3)}\, \frac{e^{-2i} - 3}{e^{-2i} - 3} \\
&= \pi i\,(3 - e^{-2i}) \\
&= -\pi\sin(2) + \pi(3 - \cos(2))\, i\,.
\end{aligned}$$