NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Test del 15.11.2013

1) Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. Si verifichi che esiste un insieme misurabile $S \subset E_o \subset \mathbb{R}^n$ avendo ha la seguente proprietà di minimalità:

Ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ contenente S contiene anche E_o fino ad un insieme di misura nulla, cioè per un opportuno insieme di misura nulla $N \subset \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$E_o \subset E \cup N\,.$$

2) Sia $f : \big(0\,,1\big] \longrightarrow \big(0\,,1\big]$ la funzione definita da

$$f(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x} - \text{ parte intera di } \dfrac{1}{x}\right) & \text{per } \dfrac{1}{x} \text{ non intero,} \\ \qquad\qquad 1 & \text{per } x = \dfrac{1}{k} \text{ con } k \geq 1 \text{ intero,} \end{cases}$$

cioè

$$f(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x} - k\right) & \text{se } \dfrac{1}{k+1} \leq x < \dfrac{1}{k}\,, \\ \quad 1 & \text{se } x = 1\,. \end{cases}$$

a) Descrivere $f^{-1}\big((a\,,b]\big)$ per ogni $0 \leq a < b \leq 1$ e verificare che f è una funzione di Borel.

b) Mostrare che esistono delle costanti $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$ tali che

$$c_1\big(b-a\big) \leq \big|f^{-1}\big((a\,,b]\big)\big| \leq c_2\big(b-a\big)\,, \quad 0 \leq a < b \leq 1\,.$$

3) Sapendo che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,,$$

è corretto il seguente passaggio al limite sotto il segno di integrale

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\chi_{[0\,,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

dove $\chi_{[0\,,n]}$ indica la funzione caratteristica di $[0\,,n]$?

Suggerimento: Si cerchi di maggiorare $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ con e^{-x} per $0\le x\le n$.

Soluzioni:

1) **: Caso** $|S|_e < +\infty$ **.**

Secondo la definizione della misura esterna di Lebesgue, per ogni intero $j \geq 1$ esiste un aperto $S \subset U_j \subset \mathbb{R}^n$ tale che

$$|U_j| < |S|_e + \frac{1}{j}\,.$$

Poniamo

$$E_o := \bigcap_{j \geq 1} U_j\,.$$

Allora E_o è un insieme G_δ , quindi misurabile, contenente S e tale che

$$|S|_e \leq |E_o| \leq |S|_e + \frac{1}{j}\,, \qquad j \geq 1\,,$$

quindi $|E_o| = |S|_e$.

Sia ora $E \subset \mathbb{R}^n$ un qualsiasi insieme misurabile contenente S . Allora

$$|E_o \setminus E| = |E_o \setminus (E_o \cap E)| = |E_o| - |\underbrace{E_o \cap E}_{\supset S}| \leq |E_o| - |S|_e = 0\,,$$

Di conseguenza $N := E_o \setminus E$ è un insieme misurabile di misura nulla ed ovviamente

$$E_o = (E_o \cap E) \cup (E_o \setminus E) \subset E \cup N\,.$$

Caso generale.

Sia $A_k\,, k \geq 1$, una successione di insiemi misurabili di misura finita ed a due a due disgiunti in $\mathbb{R}^n$, tali che la loro unione sia uguale a $\mathbb{R}^n$. Possiamo, per esempio, prendere

$$A_k := [-k\,, k)^n \setminus [-k+1\,, k-1)^n\,, \qquad k \geq 1\,.$$

Secondo la prima parte della soluzione, per ogni $k \geq 1$ esiste un insieme misurabile $S \cap A_k \subset E_k \subset \mathbb{R}^n$ tale che per qualsiasi insieme misurabile $F_k \subset \mathbb{R}^n$ contenente $S \cap A_k$ c'è un insieme di misura nulla $N_k \subset \mathbb{R}^n$ con

$$E_k \subset F_k \cup N_k\,.$$

Allora

$$E_o := \bigcup_{k \geq 1} E_k$$

è un insieme misurabile contenente

$$\bigcup_{k \geq 1} (S \cap A_k) = S \cap \underbrace{\bigcup_{k \geq 1} A_k}_{= \mathbb{R}^n} = S \, .$$

Sia ora $E \subset \mathbb{R}^n$ un qualsiasi insieme misurabile contenente S. Per ogni $k \geq 1$, $E \cap A_k$ è un insieme misurabile contenente $S \cap A_k$, quindi per un opportuno insieme di misura nulla $N_k \subset \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$E_k \subset (E \cap A_k) \cup N_k \, .$$

Risulta che $N := \bigcup\limits_{k \geq 1} N_k$ è un insieme di misura nulla e

$$\begin{aligned} E_o &= \bigcup_{k \geq 1} E_k \subset \bigcup_{k \geq 1} \Big((E \cap A_k) \cup N_k \Big) \\ &= \Big(\bigcup_{k \geq 1} (E \cap A_k) \Big) \cup \bigcup_{k \geq 1} N_k = \Big(E \cap \underbrace{\bigcup_{k \geq 1} A_k}_{= \mathbb{R}^n} \Big) \cup N \\ &= E \cup N \, . \end{aligned}$$

2) : a) Siano $0 \leq a < b \leq 1$. Per ogni intero $k \geq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \Big[\frac{1}{k+1} \,, \frac{1}{k} \Big) &= \Big\{ x \in \Big[\frac{1}{k+1} \,, \frac{1}{k} \Big) ; a < \frac{1}{x} - k \leq b \Big\} \\ &= \Big\{ x \in \Big[\frac{1}{k+1} \,, \frac{1}{k} \Big) ; \frac{1}{k+b} \leq x < \frac{1}{k+a} \Big\} \\ &= \Big[\frac{1}{k+b} \,, \frac{1}{k+a} \Big) . \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \big(0\,,1\big) &= \bigcup_{k \geq 1} \Big(f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \Big[\frac{1}{k+1} \,, \frac{1}{k} \Big) \Big) \\ &= \bigcup_{k \geq 1} \Big[\frac{1}{k+b} \,, \frac{1}{k+a} \Big) \end{aligned}$$

e possiamo concludere :

Se $0 \leq a < b < 1$ allora

$$f^{-1}\big((a\,,b]\big) = f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \big(0\,,1\big) = \bigcup_{k\geq 1} \left[\frac{1}{k+b}\,,\frac{1}{k+a}\right),$$

mentre se $0 \leq a < b = 1$ allora

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((a\,,1]\big) &= \{1\} \cup \Big(f^{-1}\big((a\,,1]\big) \cap \big(0\,,1\big)\Big) \\ &= \{1\} \cup \bigcup_{k\geq 1} \left[\frac{1}{k+1}\,,\frac{1}{k+a}\right). \end{aligned}$$

Per verificare che f è una funzione di Borel basta mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$ è un insieme di Borel. Ma usando la formula di cui sopra si ottiene

$$f^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big) = \begin{cases} \big(0\,,1\big] & \text{se} \quad \lambda \leq 0\,, \\ \{1\} \cup \bigcup\limits_{k\geq 1} \left[\dfrac{1}{k+1}\,,\dfrac{1}{k+\lambda}\right) & \text{se} \quad 0 < \lambda < 1\,, \\ \emptyset & \text{se} \quad \lambda \geq 1 \end{cases}$$

e risulta la borelianità di $f^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$ in tutti i casi.

b) Nel punto a) abbiamo visto che, per ogni $0 \leq a < b \leq 1$,

$$f^{-1}\big((a\,,b]\big) = \begin{cases} \bigcup\limits_{k\geq 1} \left[\dfrac{1}{k+b}\,,\dfrac{1}{k+a}\right) & \text{se} \;\; b < 0\,, \\ \{1\} \cup \bigcup\limits_{k\geq 1} \left[\dfrac{1}{k+b}\,,\dfrac{1}{k+a}\right) & \text{se} \;\; b = 1\,, \end{cases}$$

perciò

$$\big|f^{-1}\big((a\,,1]\big)\big| = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k+b} - \frac{1}{k+a}\right) = \big(b-a\big) \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+a)(k+b)}\,.$$

Poiché

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+a)(k+b)} \quad \begin{cases} \leq \sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}\,, \\ \geq \sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6} - 1\,, \end{cases}$$

risulta

$$\Big(\frac{\pi^2}{6}-1\Big)\big(b-a\big) \le \big|f^{-1}\big((a\,,b]\big)\big| \le \frac{\pi^2}{6}\big(b-a\big)\,.$$

3) : La successione delle funzioni continue (quindi misurabili)

$$\big(0\,,+\infty\big) \ni x \longmapsto \chi_{[0\,,n]}(x)\bigg(1-\frac{x}{n}\bigg)^{n} \ln x\,,\, n \ge 1$$

converge puntualmente alla funzione continua (quindi misurabile)

$$\big(0\,,+\infty\big) \ni x \longmapsto e^{-x}\ln x\,.$$

La correttezza del passaggio al limite sotto il segno di integrale seguirà se verifichiamo la validità della condizione di dominanza

$$\bigg|\chi_{[0\,,n]}(x)\bigg(1-\frac{x}{n}\bigg)^{n}\ln x\bigg| \le g(x)\,,\qquad x \in \big(0\,,+\infty\big)\,,n \ge 1\,,$$

cioè

$$\bigg(1-\frac{x}{n}\bigg)^{n}\big|\ln x\big| \le g(x)\,,\qquad x \in \big(0\,,n\big)\,,n \ge 1\,, \tag{1}$$

dove $g:\big(0\,,+\infty\big)\longrightarrow\big[0\,,+\infty\big)$ è una opportuna funzione sommabile. A questo fine proviamo che

$$\bigg(1-\frac{x}{n}\bigg)^{n} \le e^{-x}\,,\qquad x \in \big(0\,,+\infty\big)\,,n \ge 1\,. \tag{2}$$

(2) è equivalente ($x = nt$) alla disuguaglianza

$$1-t \le e^{-t}\,,t \in \big(0\,,1\big)\,.$$

Ma la funzione $1-t-e^{-t}$ si annulla in $t=0$ ed è decrescente in $\big(0\,,+\infty\big)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(1-t-e^{-t}\big) = -1+e^{-t} < 0\,,\qquad t > 0\,.$$

Di conseguenza $1-t-e^{-t} < 0$ per ogni $t > 0$.

In virtù di (2) la disuguaglianza (1) sarà soddisfatta ponendo

$$g(x) := e^{-x}|\ln x|\,,\qquad x > 0$$

e resta solo da verificare che la funzione $g : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \big[0\,,+\infty\big)$ è sommabile. Ma

$$\int_0^1 e^{-x}|\ln x|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \big(-\ln x\big)\mathrm{d}x = \big(x - x\ln x\big)\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 < +\infty$$

e

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}|\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}\big(-e^{-x}\big) = \underbrace{\big(-e^{-x}\ln x\big)\Big|_{x=1}^{x=+\infty}}_{=0} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 < +\infty\,.$$

Osservazione 1.

Chiaramente, per ogni funzione misurabile $f : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che il suo prodotto con e^{-x} sia sommabile, è giustificato il passaggio al limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(nel caso dell'esercizio 3) $f(x) = \ln x$).

Osservazione 2.

Il passaggio al limite nell'esercizio 3) può essere usato per calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\,.$$

In verità, possiamo calcolare esplicitamente gli integrali

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x\,, \qquad n \geq 1\ :$$

tramite integrazione per parti seguita dalla sostituzione

$$t = 1 - \frac{x}{n}\,, \quad x = n(1-t)\,, \quad \mathrm{d}x = -n\,\mathrm{d}t$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{n+1} \int\limits_0^n \ln x \,\mathrm{d}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{n}{n+1} \left[\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right)\ln x \,\Bigg|_{x=0}^{x=n} - \int\limits_0^n \left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \int\limits_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right] = \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \int\limits_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right] = \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right].
\end{aligned}$$

Perciò

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right] = -\gamma\,,$$

dove

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln n\right]$$

è la cosiddetta *costante di Eulero-Mascheroni.*

L'esistenza del limite che definisce la costante di Eulero-Mascheroni si può verificare anche direttamente. Infatti, poiché

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}\,, \quad \ln n = \sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+1) - \ln k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

dove

$$0 < \frac{1}{k} - \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) < \frac{1}{2\,k^2} \ :$$

La funzione $\big[0\,,+\infty\big) \ni t \longmapsto t - \ln(1+t)$ si annulla in $t = 0$ ed è strettamente crescente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t - \ln(1+t)\Big) = \frac{t}{1+t} > 0\,, \qquad t > 0\,.$$

Perciò

$$t - \ln(1+t) > 0\,, \qquad t > 0\,.$$

Poi la funzione $\big[0\,,+\infty\big) \ni t \longmapsto t - \ln(1+t) - \dfrac{t^2}{2}$ si annulla in $t = 0$ ed è strettamente decrescente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t - \ln(1+t) - \frac{t^2}{2}\right) = -\frac{t^2}{1+t} < 0\,, \qquad t > 0\,.$$

Così otteniamo anche la disuguaglianza

$$t - \ln(1+t) - \frac{t^2}{2} < o \iff t - \ln(1+t) < \frac{t^2}{2}\,, \qquad t > 0\,.$$

Risulta che la costante γ di Eulero-Mascheroni è la somma della serie a termini positivi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\right)$$

che è convergente perché si maggiora termine a termine con la serie convergente nota

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\,k^2} = \frac{\pi^2}{12} = 0.8224670... \,.$$

Il valore di γ con venti decimali esatti è

$$\gamma = 0,57721566490153286060... \,.$$

Non è ancora noto se γ sia razionale o meno.