NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2010/2011
Analisi Reale e Complessa, Test del 04.12.2009

1) Verificare o smentire il passaggio al limite sotto il segno di integrale :

$$\lim_{s\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\Big(\lim_{s\to+\infty} e^{-sx}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big)\,\mathrm{d}x\ .$$

2) Si verifichi che la funzione $F:\big(0\,,+\infty\big)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\ ,\qquad s>0$$

è derivabile. Si calcoli la derivata e si trovi il valore dell'integrale $F(s)$ per ogni $s>0$.

3) Applicando il teorema di Tonelli all'integrale

$$\iint\limits_{x>0\,,\,t>0}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

si calcoli

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Soluzioni:

1) **:** Mostreremo di più, cioè che per ogni $k \geq 1$ naturale ed ogni numero reale $\alpha < k+1$ (nel nostro caso $k = 1$ e $\alpha = 1/2$) abbiamo

$$\lim_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{(\sin x)^k}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{s\to+\infty} e^{-sx} \frac{(\sin x)^k}{x^\alpha} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} 0 \, \mathrm{d}x = 0 \, . \tag{*}$$

Infatti, indicando

$$f(x,s) := e^{-sx} \frac{(\sin x)^k}{x^\alpha} \, , \qquad x \in (0,+\infty) \, , \, s \in (1,+\infty) \, ,$$

abbiamo :

1) $(0,+\infty) \ni x \longmapsto f(x,s) \in \mathbb{R}$ è continua, quindi misurabile, per ogni $s \in (1,+\infty)$.

2) Da una parte

$$|f(x,s)| = e^{-sx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^k x^{k-\alpha} \leq x^{k-\alpha} =: g_1(x)$$

per $0 < x < 1 \, , s \in (1,+\infty)$, dove $g_1 : (0,1) \longrightarrow [0,+\infty)$ è integrabile perché $k - \alpha > -1$. Dall'altro canto

$$|f(x,s)| = e^{-sx} \frac{|\sin x|^k}{x^\alpha} \leq e^{-sx} \leq e^{-x} =: g_2(x)$$

per $x \geq 1 \, , s \in (1,+\infty)$, dove $g_2 : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ è integrabile. Cosicché la funzione $g : (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{per } x \in (0,1) \\ g_2(x) & \text{per } x \in [1,+\infty) \end{cases} \, ,$$

è integrabile ed abbiamo

$$|f(x,s)| \leq g(x) \text{ per ogni } x \in (0,+\infty) \, , s \in (1,+\infty) \, .$$

3) Il limite $\lim\limits_{s\to+\infty} F(x,s)$ esiste ed è uguale a 0 per ogni $x \in (0,+\infty)$.

Possiamo quindi aplicare il teorema della convergenza dominata per parametro reale concludendo la valabilità di (*).

2) **:** Siccome

$$0 \leq e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x} = e^{-sx}\frac{\sin x}{x}\,\sin x \leq e^{-sx}\,, \qquad x>0\,,\ s>0\,,$$

la funzione F è ben definita.

La derivabilità di $F(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile in ogni $s \in (0,+\infty)$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\right) = -\,e^{-sx}\sin^2 x\,, \qquad x>0\,,\ s>0$$

e, per $x>0\,, s\geq\varepsilon>0$, abbiamo la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right| \leq e^{-sx} \leq e^{-\varepsilon x}$$

dove la funzione $e^{-\varepsilon x}$ è integrabile su $(0,+\infty)$. Così F risulta derivabile in ogni $s \in (0,+\infty)$ ed abbiamo

$$\begin{aligned} F'(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad (**) \\ &= -\,\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Il primo integrale si calcola facilmente:

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,.$$

Per calcolare il secondo integrale, calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tramite integrazione ripetuta per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
=&\;-\frac{1}{s}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}e^{-sx} \\
=&\;-\frac{1}{s}\,e^{-sx}\cos(2x)-\frac{2}{s}\int e^{-sx}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
=&\;-\frac{1}{s}\,e^{-sx}\cos(2x)+\frac{2}{s^2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}e^{-sx} \\
=&\;-\frac{1}{s}\,e^{-sx}\cos(2x)+\frac{2}{s^2}\,e^{-sx}\sin(2x)-\frac{4}{s^2}\int e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

da dove deduciamo che

$$\begin{aligned}
\int e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1+\dfrac{4}{s^2}}\,e^{-sx}\Big(-\frac{1}{s}\cos(2x)+\frac{2}{s^2}\sin(2x)\Big) \\
&= \frac{e^{-sx}}{s^2+4}\Big(2\sin(2x)-s\cos(2x)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Risulta

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{s}{s^2+4}$$

e così (**) implica prima

$$F'(s)=-\frac{1}{2\,s}+\frac{s}{2\,(s^2+4)}=-\frac{1}{2\,s}+\frac{(s^2+4)'}{4\,(s^2+4)}\,,$$

e poi

$$F(s)=-\frac{1}{2}\ln s+\frac{1}{4}\ln(s^2+4)+C=\frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}+C\,.$$

Per determinare la costante C, possiamo usare (*) ottenendo $C=0$.

Concudiamo che

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = F(s) = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}\,, \qquad s>0\,.$$

3) **:** Applicando il teorema di Tonelli alla funzione positiva continua

$$[0\,,+\infty)\times[0\,,+\infty)\ni(x,t)\longmapsto\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t &= \iint\limits_{x>0\,,\,t>0}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Ma

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}\,.$$

Infatti, avendo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+t\,x^2} &= \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{t}\,x)}{1+(\sqrt{t}\,x)^2}=\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{t}\,x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{t}}\end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\sqrt{t}}{1+(\sqrt{t})^2}=\pi\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{t}\,\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\\ &=\frac{\pi^2}{2}\,.\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Infatti, per ogni $x\neq 1$ è possibile uno sviluppo in fratti semplici della forma

$$\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}=\frac{a}{1+t}+\frac{b}{1+t\,x^2}$$

e troviamo

$$a=-\frac{1}{x^2-1}\,,\quad b=\frac{x^2}{x^2-1}\,.$$

Risulta

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t\,x^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{1+t}+\frac{x^2}{1+t\,x^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{x^2-1}\left(-\ln\big(1+t\big)+\ln\big(1+t\,x^2\big)\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\\&=\frac{1}{x^2-1}\,\ln\frac{1+t\,x^2}{1+t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\\&=\frac{\ln x^2}{x^2-1}\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\frac{\pi^2}{2}=2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,$$

cioè

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}\,.$$