NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Test del 18.01.2013

1) *A*) Per ogni numero reale positivo r sia D_r il disco chiuso di centro 0 e raggio r, poi sia a un numero complesso e R un numero reale positivo. Sia $f : \mathbb{C} \setminus D_R \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $\lim_{z\to\infty} z\ f(z) = a$. Mostrare che

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\partial^+ D_r} f(z)\, dz = 2\pi a i\,.$$

B) Calcolare

$$\sum_{p\in\mathbb{C}} Res\left(\left(z^2+5\right)\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right), p\right).$$

C) Calcolare

$$\int_{\partial^+ D_{10}} \frac{z^4+2z^3+z+3}{10\,z^5+z^3+2z+4}\,\mathrm{d}z\,.$$

2) *a*) Sia $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto tale che $|g(z)| \geq 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus K$. Mostrare che g è una funzione polinomiale.

b) Siano $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e $k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ funzioni olomorfe, entrambe non identicamente nulle. Sia poi $K \subset \mathbb{C}$ un compatto tale che $|h(z)| \geq |k(z)|$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

Mostrare che esiste una funzione razionale r tale che $h(z) = k(z)\,r(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $k(z) \neq 0$.

Suggerimento: Mostrare che la funzione $\dfrac{h}{k}$ ammette solo un numero finito di singolarità non eliminabili.

c) Caratterizzare l'insieme delle funzioni olomorfe $s : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che $\left|s(e^z)\right| \leq \left|e^{-2z} + e^{-z}\right|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) \geq 2$.

3) Sia D il disco chiuso di centro 0 e raggio 1. Calcolare:

$$\alpha) : \quad \int_{\partial^+ D} \frac{e^z}{\sin(z)}\, \mathrm{d}z \,,$$

$$\beta) : \quad \int_{\partial^+ D} \frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}\, \mathrm{d}z \,,$$

$$\gamma) : \quad \int_{\partial^+ D} e^{1/z}\, (z^2 + z^3)\, \mathrm{d}z \,.$$

Soluzione: **1)** A) Basta mostrare che, per ogni successione divergente $\{r_n\}$ di numeri reali positivi,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial^+ D_{r_n}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi a i\,.$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial^+ D_{r_n}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} i \int\limits_0^{2\pi} f(r_n e^{it}) r_n e^{it}\,\mathrm{d}t, .$$

Siccome $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = a$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{R}^+$ tale che,

$$|z| > m \implies \big|zf(z) - a\big| < \epsilon\,.$$

Ora, siccome $\{r_n\}$ diverge, esiste n_0 tale che, se $n > n_0$, si ha $r_n > m$ e quindi $\big|zf(z) - a\big| < \epsilon$ per ogni z con $|z| = r_n$. Questo significa che la successione di funzioni $\{f(r_n e^{it}) r_n e^{it} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\}$ converge uniformemente alla funzione costante di valore a. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} i \int\limits_0^{2\pi} f(r_n e^{it}) r_n e^{it}\,\mathrm{d}t = i \int\limits_0^{2\pi} a\,\mathrm{d}t = 2\pi a i$$

e

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ D_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi a i\,.$$

A) (soluzione alternativa) La funzione $\phi : \mathbb{C} \setminus D_R \longrightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo $\phi(z) := zf(z) - a$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus D_R$ è olomorfa e $\lim\limits_{z\to\infty} \phi(z) = 0$. Per la teoria vista a lezione, sappiamo quindi che esiste una successione di numeri complessi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ tali che $\phi(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n z^{-n}$.

Ne segue che $f(z) = az^{-1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n z^{-n-1}$. Per l'unicità dello sviluppo in serie bilatero sulle corone circolari, per ogni $r > R$ si ha $\int\limits_{\partial^+ D_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi a i$ e di conseguenza

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ D_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi a i\,.$$

B) La funzione $(z^2+5)\sin\left(\dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right)$ è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. Quindi, per il teorema dei residui, per ogni $r>2$ si ha

$$\sum_{p\in\mathbb{C}} Res\left((z^2+5)\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right),p\right)=$$

$$\int_{\partial^+D_r}(z^2+5)\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right)\mathrm{d}z\,.$$

Perciò

$$\sum_{p\in\mathbb{C}} Res\left((z^2+5)\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right),p\right)=$$

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial^+D_r}(z^2+5)\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right)\mathrm{d}z$$

e, per il punto A), abbiamo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial^+D_r}(z^2+5)\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right)\mathrm{d}z=$$

$$2\pi i\left(\lim_{z\to\infty} z(z^2+5)\sin\left(\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}\right)\right)=2\pi i\,.$$

C) Se $|z|>10$ si ha

$$\left|10\,z^5+z^3+2z+4\right|\geq 10\,|z|^5-|z|^3-2\,|z|-4=$$

$$3\,|z|^5+(|z|^5-|z|^3)+2\,(|z|^5-|z|^2)+4\,(|z|^5-1)>3(10)^5.$$

Ne segue che la funzione meromorfa integranda è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus D_{10}$. Per Gauss-Green, per ogni reale $r>10$ si ha

$$\int_{\partial^+D_r}\frac{z^4+2z^3+z+3}{10\,z^5+z^3+2z+4}\,\mathrm{d}z=\int_{\partial^+D_{10}}\frac{z^4+2z^3+z+3}{10\,z^5+z^3+2z+4}\,\mathrm{d}z\,.$$

Quindi

$$\int_{\partial^+D_{10}}\frac{z^4+2z^3+z+3}{10\,z^5+z^3+2z+4}\,\mathrm{d}z=\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial^+D_r}\frac{z^4+2z^3+z+3}{10\,z^5+z^3+2z+4}\,\mathrm{d}z\,.$$

Per il punto $A)$ si ha

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ D_r} \frac{z^4+2z^3+z+3}{10z^5+z^3+2z+4}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \lim_{z\to\infty} z\frac{z^4+2z^3+z+3}{10z^5+z^3+2z+4} = \frac{\pi i}{5}\,.$$

In conclusione

$$\int\limits_{\partial^+ D_{10}} \frac{z^4+2z^3+z+3}{10z^5+z^3+2z+4}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{5}\,.$$

Soluzione: 2) *a*). Poiché la funzione g è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, il suo sviluppo in serie di potenze nell'origine ha raggio di convergenza infinito. Quindi esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,, \qquad z\in\mathbb{C}\,.$$

Basta mostrare che esiste n_0 tale che $a_n = 0$ per ogni $n > n_0$.

Se ciò non fosse vero la funzione $l : \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ definita da

$$l(z) := g(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$$

avrebbe una singolarità essenziale in 0. Questo è assurdo per il teorema di Casorati Weierstrass, perché $|l(z)| > 1$ per ogni $z\neq 0$ in un piccolo intorno dell'origine e quindi l'immagine di quell'intorno tramite l non interseca il disco di centro 0 e raggio 1.

Alternativamente, l non può avere una singolarità essenziale in 0 perché $|l(z)| > 1$ per ogni $z \neq 0$ in un piccolo intorno dell'origine, quindi $1/l(z)$ è una funzione limitata nello stesso intorno e la sua singolarità isolata in 0 è eliminabile. Ne segue che, in un intorno di 0, la funzione l è la funzione reciproca di una funzione olomorfa e pertanto ammette singolarità al più polari.

b) Mostriamo prima, come suggerito, che l'insieme delle singolarità non eliminabili di $\dfrac{h}{k}$ è finito. Siccome $\dfrac{h}{k}$ è un rapporto tra funzioni olomorfe, le sue singolarità sono contenute nell'insieme discreto e chiuso degli zeri di k. Basta mostrare che le singolarità di $\dfrac{h}{k}$ contenute nel complemento di un opportuno disco chiuso Δ sono eliminabili. Infatti, in questo caso, le singolarità non eliminabili costituiscono un insieme discreto e chiuso contenuto in un compatto e pertanto un insieme finito.

La funzione $\dfrac{k}{h}$, essendo un rapporto tra due funzioni olomorfe, ha solo singolarità isolate nell'insieme degli zeri di h. Siccome $\dfrac{k}{h}$ è limitata al di fuori di K, al di fuori di K essa si estende ad una funzione $\varphi : \mathbb{C} \setminus K \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Per lo stesso motivo la singolarità isolata in 0 della funzione $\varphi(1/z)$ è eliminabile. Ne segue che esiste $\epsilon > 0$ tale che $\varphi(1/z) \neq 0$ per ogni $z \neq 0$ con $|z| \leq \epsilon$. Quindi, indicando con Δ il disco chiuso di centro 0 e raggio $1/\epsilon$, la funzione φ è una funzione olomorfa mai nulla in $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Se ne conclude che su $\mathbb{C} \setminus \Delta$ la funzione $1/\varphi$ è un estensione olomorfa di $\dfrac{h}{k}$ e che quest'ultima ha solo singolarità eliminabili fuori di Δ.

Siccome $\dfrac{h}{k}$ ammette al più un numero finito di singolarità non eliminabili e queste sono polari (perché $\dfrac{h}{k}$ è rapporto tra funzioni olomorfe), esiste un polinomio q tale che $\dfrac{h\,q}{k}$ ha solo singolarità eliminabili. Applicando il punto a) alla funzione g, estensione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ di $\dfrac{h\,q}{k}$, otteniamo l'esistenza di un polinomio p tale che $g(z) = p(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Ne segue che $h(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}\,k(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $k(z) \neq 0$.

c) Osserviamo che $e^{-2z} + e^{-z} = t(e^z)$ con $t : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $g(z) = 1/z^2 + 1/z$. Inoltre l'immagine tramite la funzione esponenziale dell'insieme dei numeri complessi di parte reale maggiore o uguale a 2 è il complemento in $\mathbb{C}$ del disco aperto di centro 0 e raggio e^2. Quindi

$$|s(z)| < |1/z + 1/z^2| \text{ per ogni } z \text{ tale che } |z| \geq e^2 \,.$$

Fissato $z \in \mathbb{C}$, sia $\rho > e^2$ un positivo reale tale che $|z| < \rho$ e sia D_ρ il disco di centro 0 e raggio ρ. Per il principio del massimo

$$0 \leq |s(z)| \leq \sup\{|1/z + 1/z^2|\}_{z\in\partial D_\rho} \,.$$

Siccome $\lim\limits_{z\to\infty} 1/z + 1/z^2 = 0$, anche

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup\{|1/z + 1/z^2|\}_{z\in\partial D_\rho} = 0 \,.$$

Quindi per ogni $z \in \mathbb{C}$ abbiamo $s(z) = 0$. L'insieme da caratterizzare è costituito perciò dalla sola funzione nulla.

Soluzione: 3) Per la formula di Eulero $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Dati a e b reali, si ha quindi $\sin(a + ib) = 0$ se e solo se $e^{ia-b} = e^{-ia+b}$, cioè se e solo se $e^{2b}e^{-2ia} = 1$. Ancora per la formula di Eulero, questo equivale a $b = 0$ e $a = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Quindi $\sin(z)$ si annulla soltanto sui multipli interi di π.

α) La funzione $\dfrac{e^z}{\sin(z)}$ è olomorfa in un aperto contenente $D \setminus \{0\}$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\partial^+ D} \frac{e^z}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z = Res\left(\frac{e^z}{\sin(z)}, 0\right).$$

Siccome lo 0 è un polo di ordine 1 per $\dfrac{e^z}{\sin(z)}$, abbiamo

$$Res\left(\frac{e^z}{\sin(z)}, 0\right) = 2\pi i \lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{\sin(z)} = 2\pi i.$$

Quindi

$$\int_{\partial^+ D} \frac{e^z}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,.$$

β) La funzione $\dfrac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}$ è olomorfa in un aperto contenente $D\setminus\{0\}$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\partial^+ D} \frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}\,\mathrm{d}z = Res\left(\frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}, 0\right).$$

Siccome lo 0 è un polo di ordine 3 per $\dfrac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}$, abbiamo

$$Res\left(\frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}, 0\right) = 2\pi i\,\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\,\frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}\right) = 2\pi i a_2\,,$$

dove a_2 è il coefficiente di grado 2 dello sviluppo di Taylor di $z^3\,\dfrac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}$ in 0.

Abbiamo

$$\cos(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + o(z^2)$$

$$\sin(z) = z - \frac{1}{3!}z^3 + o(z^4)$$
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + +o(z^2)$$
per $z \to 0$.

Da cui segue

$$z^3\,\frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)} = \frac{z^3\cos\big(\sin(2z)\big)}{\big(z - \frac{1}{3!}z^3 + o(z^4)\big)^3} = \frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\big(1 - \frac{1}{3!}z^2 + o(z^3)\big)^3} =$$
$$\cos\big(\sin(2z)\big)\Bigg(1 + \Big(\frac{1}{3!}z^2 + o(z^3)\Big) + o\Big(\frac{1}{3!}z^2 + o(z^3)\Big)\Bigg)^3 =$$
$$cos\big(\sin(2z)\big)\left(1 + \frac{1}{3!}z^2 + o(z^2)\right)^3 = cos\big(\sin(2z)\big)\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + o(z^2)\right) =$$
$$\Big(1 - (2z)^2/2 + o(z^2)\Big)\Big(1 + z^2/2 + o(z^2)\Big) = 1 - \frac{3}{2}z^2 + o(z^2)$$
per $z \to 0$. Deduciamo che $a_2 = -\dfrac{3}{2}$ e

$$\int\limits_{\partial^+ D} \frac{\cos\big(\sin(2z)\big)}{\sin^3(z)}\,dz = -3\pi i$$

γ) Abbiamo

$$\int\limits_{\partial^+ D} e^{1/z}\,(z^2 + z^3)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial^+ D} e^{1/z}\,z^2\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\partial^+ D} e^{1/z}\,z^3\,\mathrm{d}z\,.$$

Le funzioni integrande sono olomorfe in un aperto contenente $\overline{D}\setminus\{0\}$. Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int\limits_{\partial^+ D} e^{1/z}\,z^2\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\partial^+ D} e^{1/z}\,z^3\,\mathrm{d}z = Res(e^{1/z}\,z^2, 0) + Res(e^{1/z}\,z^3, 0)\,.$$

Lo sviluppo in serie di Laurent centrato in 0 di $e^{1/z}z^2$ è $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,z^{-n+2}$. Il coefficiente di grado -1 si ottiene per $n = 3$ ed è $\dfrac{1}{3!}$. Quindi

$$Res(e^{1/z}\,z^2, 0) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}\,.$$

Lo sviluppo in serie di Laurent centrato in 0 di $e^{1/z}\,z^3$ è $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, z^{-n+3}$. Il coefficiente di grado -1 si ottiene per $n = 4$ ed è $\dfrac{1}{4!}$. Quindi

$$Res(e^{1/z}\,z^3, 0) = \frac{2\pi i}{4!} = \frac{\pi i}{12}\,.$$

In conclusione

$$\int_{\partial^+ D} e^{1/z}\,(z^2 + z^3)\,\mathrm{d}z = \pi i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = \frac{5\pi i}{12}\,.$$