NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2014/2015
Analisi Reale e Complessa, Test del 19.01.2015

1) *A*) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso contenente l'origine 0.
Sia $\{f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,;\, n \geq 1\}$ una successione di funzioni olomorfe, nulle in 0 e convergente uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa non costante $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.
Mostrare che esistono $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che il disco $D_{(0,\epsilon)}$ di centro 0 e raggio ϵ è incluso in $f_n(\Omega)$ per ogni $n > n_0$.

B) Sia $\mathcal{J}$ l'insieme delle funzioni olomorfe $g : D_{(0,1)} \to \mathbb{C}$ tali che $g(0) = 0\,,\ \dfrac{dg}{dz}(0) = 1$ e $\left|\dfrac{dg}{dz}(z)\right| < 2$ per ogni $z \in D_{(0,1)}$. Mostrare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tale $D_{(0,\alpha)} \subset g(D_{(0,1)})$ per ogni $g \in \mathcal{J}$.
Suggerimento: Usare *A*) per dimostrare *B*).

2) Calcolare i seguenti integrali usando il teorema dei residui:

$$\alpha)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\beta)\ \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{3\cos(x)+5}\,\mathrm{d}x\,.$$

3) Siano $s_1 := \{1 + it \in \mathbb{C} : \; t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, $s_2 := \{-1 - it \in \mathbb{C} : \; t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ e $s_3 := \{-1 + it \in \mathbb{C} : \; t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. Sia inoltre $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(z) = z^2 - 1$.

a) Mostrare che esiste un unica radice quadrata olomorfa g di f sull'aperto $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$ tale che $g\left(\sqrt{2}\right) = 1$.

b) Mostrare che g è pari.

c) Calcolare $Res\left(\dfrac{g(z)}{e^z - e^{\sqrt{2}}}, \sqrt{2}\right)$ e $Res\left(\dfrac{g(z)}{\left(e^z - e^{\sqrt{2}}\right)^2}, \sqrt{2}\right)$.

d) Sia h l'unica radice quadrata olomorfa di f sull'aperto $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_3)$ tale che $h\left(\sqrt{2}\right) = 1$. Calcolare $Res\left(\dfrac{h(z)}{e^z - e^{-\sqrt{2}}}, -\sqrt{2}\right)$.

Soluzione 1): *A*) Sia $r > 0$ un numero reale positivo tale che la chiusura del disco $D_{(0,r)}$ di centro 0 e raggio r sia inclusa in Ω. Siccome f non è costante, gli zeri di f sono isolati e possiamo assumere che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial D_{(0,r)}$.

Sia $\epsilon \in \mathbb{R}$ un numero reale strettamente positivo tale che la chiusura del disco $D_{(0,\epsilon)}$ non intersechi l'immagine della curva regolare a tratti $f \circ \partial^+ D_{(0,r)}$. Siccome f_n converge uniformemente sui compatti a f, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la chiusura del disco $D_{(0,\epsilon)}$ non interseca $f_n(\partial D_{(0,r)})$ per ogni $n > n_0$. Mostriamo che $D_{(0,\epsilon)} \subset f_n(D_{(0.r)})$ per ogni naturale $n > n_0$.

Sia $n > n_0$, sia $y \in D_{(0,\epsilon)}$, e sia $\mathrm{Ord}(f_n(z) - y, 0)$ la molteplicità di z come zero della funzione $f_n - y$. Siccome $D_{(0,\epsilon)}$ non interseca $f_n(\partial D_{(0,r)})$, si ha $f_n(z) \neq y$ per ogni $z \in \partial D_{(0.r)}$ e applicando il principio dell' argomento a $f_n - y$ otteniamo

$$\sum_{z \in D_{(0,r)} : f_n(z) = y} \mathrm{Ord}(f_n(z) - y, 0) = n_{((f_n - y) \circ \partial^+ D_{(0,r)}, 0)}$$

dove $n_{(\gamma,p)}$ indica l'indice di avvolgimento della curva γ intorno al punto p.

Inoltre, dall'invarianza per traslazione del numero di avvolgimento si deduce

$$n_{((f_n - y) \circ \partial^+ D_{(0,r)}, 0)} = n_{(f_n \circ \partial^+ D_{(0,r)}, y)}$$

e siccome $D_{(0,\epsilon)}$ non interseca $f_n(\partial D_{(0,r)})$, il punto y è nella stessa componente connessa dell'origine nel complemento in $\mathbb{C}$ di $f_n(\partial D_{(0,r)})$, quindi

$$n_{(f_n \circ \partial^+ D_{(0,r)}, y)} = n_{(f_n \circ \partial^+ D_{(0,r)}, 0)}\,.$$

Applicando il principio dell'argomento alla funzione f_n su $D_{(0,r)}$ otteniamo infine

$$n_{(f_n \circ \partial^+ D_{(0,r)}, 0)} = \sum_{z \in D_{(0,r)} : f_n(z) = 0} \mathrm{Ord}(f_n(z), 0)$$

e l'ultima quantità è strettamente positiva perché $f_n(0) = 0$.

Unendo le uguaglianze elencate si conclude che

$$\sum_{z \in D_{(0,r)} : f_n(z) = y} \mathrm{Ord}(f_n(z) - y, 0) = \sum_{z \in D_{(0,r)} : f_n(z) = 0} \mathrm{Ord}(f_n(z), 0) >, 0$$

quindi $y \in f_n(D_{(0,r)})$ e perciò $D_{(0,\epsilon)} \subset f_n(D_{(0,r)})$.

Osservazione: l'argomento di questa soluzione è molto simile a quello della seconda dimostrazione vista a lezione del teorema della funzione aperta.

A) (Soluzione alternativa) Sia $r > 0$ un numero reale positivo tale che la chiusura del disco $D_{(0,r)}$ di centro 0 e raggio r sia inclusa in Ω. Siccome f non è costante gli zeri di f sono isolati e possiamo assumere che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial D_{(0,r)}$.

Sia $2d \in \mathbb{R}$ la distanza di $f(\partial D_{(0,r)})$ dall'origine. Siccome f_n converge uniformemente sui compatti a f, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la distanza di $f_n(\partial D_{(0,r)})$ dall'origine sia maggiore di d per ogni naturale $n > n_0$.

Sia $\epsilon \in \mathbb{R}$ un numero reale strettamente positivo tale che valga $d - \epsilon > \epsilon$ $\Big($possiamo prendere $\epsilon = \dfrac{d}{3}\Big)$. Vogliamo mostrare che $y \in f_n(D_{(0,r)})$ per ogni $y \in D_{(0,\epsilon)}$ e per ogni naturale $n > n_0$, cioè che la funzione $f_n - y$ si annulla in qualche punto di $D_{(0,r)}$.

Per mostrarlo applichiamo il principio del minimo modulo alla funzione $f_n - y$ sulla chiusura di $D_{(0,r)}$. Per ogni $z \in \partial D_{(0,r)}$ abbiamo

$$|f_n(z) - y| \leq |f_n(z)| - |y| = d - \epsilon > \epsilon$$

e inoltre

$$|f_n(0) - y| = |y| < \epsilon\,.$$

Quindi il minimo della funzione continua $|f_n - y|$ sulla chiusura di $D_{(0,r)}$ deve essere ottenuto in un punto di $D_{(0,r)}$, siccome $f_n - y$ non è costante per $n > n_0$, per il principio del minimo modulo $f_n - y$ si annulla in qualche punto di $D_{(0,r)}$.

Osservazione: la teoria delle funzioni olomorfe usata in questo secondo argomento si riduce al principio del minimo e il principio del minimo è una facile conseguenza dell'apertura delle funzioni olomorfe non costanti con dominio connesso. Quindi questa seconda soluzione chiarisce la natura topologica dell'enunciato dell'esercizio. Più precisamente l'argomento usato nella seconda soluzione dimostra il seguente enunciato.

Enunciato: *Sia* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un aperto connesso contenente l'origine* 0*. Sia poi* $\{f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\}$ *una successione di funzioni aperte, nulle in* 0 *, convergente uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *tale che* 0 *sia un punto isolato dell'insieme in cui* f *si annulla.*

Allora esistono $n_0 \in \mathbb{N}$ *e* $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ *tali che il disco* $D_{(0,\epsilon)} \subset f_n(\Omega)$ *per ogni* $n > n_0$ *.*

B) Osserviamo preliminarmente che, se $g \in I$, si ha $|g(w)| < 2$ per ogni $w \in D_{(0,1)}$. Infatti, indicando con γ_w il segmento orientato di estremi 0 e w , abbiamo

$$|f(z)| = \left| \int\limits_{\gamma_w} \frac{dg}{dz} dz \right| \leq |w| \cdot \sup \left\{ \left| \frac{dg}{dz}(z) \right| \right\}_{z \in \gamma_w} \leq 2\,.$$

Quindi I è un insieme di funzioni equilimitato.

Se per assurdo non esistesse un $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tale $D_{(0,\alpha)} \subset g(D_{(0,1)})$ per ogni $g \in I$ allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esisterebbe una funzione $g_n \in I$ tale che $D_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} \not\subset g_n(D_{(0,1)})$.

Per l'osservazione preliminare potremmo applicare il teorema di Montel alla successione $\{g_n\}$. Otterremmo l'esistenza di una sottosuccessione $\{g_{n_k}\}$ di $\{g_n\}$ convergente uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa $f : D_{(0,1)} \to \mathbb{C}$. Inoltre per il Teorema di Weierstrass sarebbe $\dfrac{df}{dz}(0) = 1$ e quindi f non sarebbe costante.

Potremmo allora applicare il punto A) di questo esercizio e otterremmo che per $D_{(0,\epsilon)} \subset g_{n_k}(D_{(0,1)})$ per ogni $k > n_0$. Questo sarebbe assurdo perché per $k > \dfrac{1}{\epsilon}$ avremmo anche $D_{\left(0,\frac{1}{n_k}\right)} \subset D_{(0,\epsilon)}$ e $D_{\left(0,\frac{1}{n_k}\right)} \not\subset g_{n_k}(D_{(0,1)})$.

Soluzione 2): α) Siccome $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)(x-3)}$ ha un'estensione continua su tutto $\mathbb{R}$ ed è dominata da $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ che a $+\infty$ e $-\infty$ tende a zero come $\dfrac{1}{x^2}$, l'integrale richiesto converge, e siccome $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)(x-3)}$ è la parte reale di $f(x) := \dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{(x-1)(x-3)}$ abbiamo

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \operatorname{Re}\left(\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{1-\frac{1}{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1+\frac{1}{R}}^{3-\frac{1}{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{3+\frac{1}{R}}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

se il limite

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{1-\frac{1}{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1+\frac{1}{R}}^{3-\frac{1}{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{3+\frac{1}{R}}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

esiste.

Per mostrare l'esistenza del limite e calcolarlo useremo il teorema dei residui.

Per $R > 10$

- sia $\gamma_{(1,R)}$ il segmento orientato di primo estremo $1+\frac{1}{R}$ e secondo estremo $3-\frac{1}{R}$;
- sia $\gamma_{(2,R)}$ la semicirconferenza, contenuta nel semipiano superiore, di centro 3 e raggio $\frac{1}{R}$ percorsa in senso orario;
- sia $\gamma_{(3,R)}$ il segmento orientato di primo estremo $3+\frac{1}{R}$ e secondo estremo R;
- sia $\gamma_{(4,R)}$ la semicirconferenza, contenuta nel semipiano superiore, di centro 0 e raggio R percorsa in senso antiorario;
- sia $\gamma_{(5,R)}$ il segmento orientato di primo estremo $-R$ e secondo estremo $1-\frac{1}{R}$;
- e sia $\gamma_{(6,R)}$ la semicirconferenza, contenuta nel semipiano superiore, di centro 1 e raggio $\frac{1}{R}$ percorsa in senso orario.

Siccome la funzione $f(z) := \dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}z\right)}}{(z-1)(z-3)}$ è olomorfa in un intorno della parte di piano delimitata dall'unione delle curve $\gamma_{(j,R)}$, usando il teorema dei residui o la versione complessa della formula di Gauss-Green, otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{1-\frac{1}{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1+\frac{1}{R}}^{3-\frac{1}{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3+\frac{1}{R}}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\int_{\gamma_{(2,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{(4,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{(6,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z \right) \end{aligned}$$

Siccome $|e^{iz}| \le 1$ per ogni z nel semipiano superiore, per R abbastanza grande $|f(z)|$ è dominato da $\dfrac{2}{|z^2|}$ su $\gamma_{(4,R)}$ e applicando il lemma del grande cerchio otteniamo

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\gamma_{(4,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Siccome 1 e 3 sono dei poli semplici per $f(z)$, possiamo applicare il lemma del piccolo cerchio su $\gamma_{(2,R)}$ e $\gamma_{(6,R)}$. Tenendo presente che queste curve percorrono un angolo pari a π in senso antiorario, otteniamo

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\gamma_{(2,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i Res(f(z),3) = -\pi i \frac{e^{i\frac{3}{2}\pi}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\gamma_{(6,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i Res(f(z),1) = +\pi i \frac{e^{i\frac{1}{2}\pi}}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to+\infty} -\left(\int\limits_{\gamma_{(2,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_{(4,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_{(6,R)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{Re}(-\pi) = -\pi\,.
\end{aligned}$$

β) Abbiamo

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{3\cos(x)+5}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{3\cos(x)+5}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x)}{3\cos(x)+5}\,\mathrm{d}x$$

perché $\dfrac{\sin(x)}{3\cos(x)+5}$ è una funzione dispari. Usando l'uguaglianza $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{3\cos(x)+5}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{3\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{3(e^{ix}+e^{-ix})+10}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Indicando, come al solito, con $D_{(0,1)}$ il disco di centro 0 e raggio 1 abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{3(e^{ix}+e^{-ix})+10}\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{z+z^{-1}}{3z+3z^{-1}+10}\frac{\mathrm{d}z}{iz} \\ &= \int_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{z^2+1}{3z^2+10z+3}\frac{\mathrm{d}z}{iz} \\ &= \int_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{z^2+1}{3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{iz}\,.\end{aligned}$$

La funzione $g(z) = \dfrac{z^2+1}{3iz(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$ ha solo due poli in $D_{0,1}$, tali poli sono 0 e $-\dfrac{1}{3}$ e sono semplici. Applicando il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\partial^+ D_{(0,1)}} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\Big(Res(g(z),0) + Res\Big(g(z),-\frac{1}{3}\Big)\Big)\,.$$

Inoltre

$$Res(g(z),0) = \left(\frac{z^2+1}{3i(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{3i}$$

e

$$Res\Big(g(z),-\frac{1}{3}\Big) = \left(\frac{z^2+1}{3iz(z+3)}\right)\Bigg|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{10}{9}}{-i\,\frac{8}{3}} = -\frac{5}{12i}\,.$$

In conclusione otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{3\cos(x)+5}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial^+ D_{(0,1)}} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{1}{3i} - \frac{5}{12i}\right) = \frac{\pi}{6}\,.$$

Soluzione 3): *a*) Mostriamo prima l'esistenza. Siccome $\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2)$ è semplicemente connesso esiste un logaritmo olomorfo $l:\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2)\longrightarrow\mathbb{C}$ di f su $\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2)$. Definiamo $\tilde{g}:\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2)\longrightarrow\mathbb{C}$ ponendo $\tilde{g}(z)=e^{\frac{1}{2}l(z)}$ per ogni $z\in\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2)$. Come visto a lezione abbiamo

$$\tilde{g}^2(z) = \left(e^{\frac{1}{2}l(z)}\right)^2 = e^{l(z)} = f(z)$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$ e quindi $\tilde{g}$ è una radice quadrata olomorfa di f su $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$. In particolare $\tilde{g}(\sqrt{2}) = 1$ o $\tilde{g}(\sqrt{2}) = -1$. Nel primo caso poniamo $g := \tilde{g}$, nel secondo caso poniamo $g := -\tilde{g}$.

Per l'unicità osserviamo che, se g_1 è un'altra radice quadrata olomorfa di f su $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$, siccome f non si annulla su questo aperto g_1 non si annulla mai nel suo dominio. Ne segue che $\dfrac{g}{g_1}$ è una radice quadrata olomorfa della funzione costante 1 su $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$. Quindi $\dfrac{g}{g_1}$ assume valori nell'insieme discreto $\{-1\,, 1\}$ ed essendo continua su un connesso, essa è una funzione costante. Perciò, se $g_1(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2})$, la funzione g_1 coincide con g su tutto $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$.

b) Definiamo $g_- : \mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2) \to \mathbb{C}$ ponendo $g_-(z) = g(-z)$ per z in $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$ (si noti che g_- ha lo stesso dominio di g).

Per mostrare che g è pari basta mostrare che $g = g_-$. Osserviamo che per $z \in \mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$ si ha $g_-^2(z) = f(-z) = f(z)$, quindi anche g_- è una radice quadrata di g su $\mathbb{C} \setminus (s_1 \cup s_2)$. Come visto nella soluzione del punto *a*), abbiamo che $g = g_-$ oppure $g = -g_-$. Siccome $g_-(0) := g(-0) = g(0)$ e $g(0) \neq 0$, concludiamo che $g = g_-$ e g è pari.

c) Siccome la derivata di $e^z - e^{\sqrt{2}}$ non si annulla mai, la funzione $\dfrac{g(z)}{e^z - e^{\sqrt{2}}}$ ha un polo semplice in $\sqrt{2}$ e, di conseguenza, la funzione $\dfrac{g(z)}{\left(e^z - e^{\sqrt{2}}\right)^2}$ ha un polo doppio in $\sqrt{2}$. Poiché il polo di $\dfrac{g(z)}{e^z - e^{\sqrt{2}}}$ in $\sqrt{2}$ è semplice, abbiamo

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{g(z)}{e^z - e^{\sqrt{2}}}, \sqrt{2}\right) &= \lim_{z \to \sqrt{2}} \frac{\left(z - \sqrt{2}\right) g(z)}{e^z - e^{\sqrt{2}}} = \lim_{z \to \sqrt{2}} \frac{\left(z - \sqrt{2}\right)}{e^z - e^{\sqrt{2}}} \\ &= \lim_{z \to \sqrt{2}} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

(nella terza uguaglianza abbiamo usato la continuità di g e nella quarta la regola di de l'Hôpital).

Per calcolare $Res\left(\dfrac{g(z)}{\left(e^z - e^{\sqrt{2}}\right)^2}, \sqrt{2}\right)$ scriviamo $\dfrac{g(z)}{\left(e^z - e^{\sqrt{2}}\right)^2}$ nella forma

$$\frac{g(z)}{\left(e^z - e^{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(z - \sqrt{2}\right)^j + o\left(\left(z - \sqrt{2}\right)^{n-1}\right)}{z^n}$$

per $z \to \sqrt{2}$ e concludiamo che $Res\left(\frac{g(z)}{\left(e^z - e^{\sqrt{2}}\right)^2}, \sqrt{2}\right) = a_{n-1}$.

Siccome stiamo studiando un residuo in un polo doppio, nel nostro caso è $n = 2$ ed è sicuramente sufficiente sviluppare g solo al primo ordine intorno a $\sqrt{2}$. Abbiamo $g\left(\sqrt{2}\right) = 1$ e per calcolare $\frac{dg}{dz}\left(\sqrt{2}\right)$ deriviamo l'identità $g^2 = f$. Otteniamo $2g\frac{dg}{dz} = \frac{df}{dz}$ da cui segue $\frac{dg}{dz} = \frac{\frac{df}{dz}}{2g}$ (la usuale formula per la derivata della radice quadrata di una funzione). Quindi abbiamo $\frac{dg}{dz}\left(\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ e perciò

$$g(z) = 1 + \sqrt{2}\left(z - \sqrt{2}\right) + o\left(z - \sqrt{2}\right)$$

per $z \to \sqrt{2}$.

Inoltre

$$\begin{aligned}
e^z - e^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}}\left(e^{z-\sqrt{2}} - 1\right) \\
&= e^{\sqrt{2}}\left(z - \sqrt{2} + \frac{\left(z - \sqrt{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(z - \sqrt{2}\right)^2\right)\right) \\
&= e^{\sqrt{2}}\left(z - \sqrt{2}\right)\left(1 + \frac{z - \sqrt{2}}{2} + o\left(z - \sqrt{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

per $z \to \sqrt{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo usato lo sviluppo di Maclaurin al secondo grado di e^z). Quindi

$$\begin{aligned}
\left(e^z - e^{\sqrt{2}}\right)^2 &= \left(e^{\sqrt{2}}\right)^2\left(z - \sqrt{2}\right)^2\left(1 + \frac{z - \sqrt{2}}{2} + o\left(z - \sqrt{2}\right)\right)^2 \\
&= e^{2\sqrt{2}}\left(z - \sqrt{2}\right)^2\left(1 + \left(z - \sqrt{2}\right) + o\left(z - \sqrt{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

per $z \to \sqrt{2}$.

Usando lo sviluppo di Maclaurin al primo grado di $\dfrac{1}{1+z}$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(z-\sqrt{2}\right)}\\
&=1-\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(z-\sqrt{2}\right)\right)\\
&=1-\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(z-\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

per $z\to\sqrt{2}$.

Infine sostituendo nell'espressione della funzione di cui vogliamo il residuo otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{g(z)}{\left(e^z-e^{\sqrt{2}}\right)^2}\\
&=\frac{\left(1+\sqrt{2}\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(z-\sqrt{2}\right)\right)\left(1-\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(z-\sqrt{2}\right)\right)}{\left(e^{2\sqrt{2}}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)^2}\\
&=\frac{1+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(z-\sqrt{2}\right)+o\left(z-\sqrt{2}\right)}{\left(e^{2\sqrt{2}}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)^2}
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
Res\left(\frac{g(z)}{\left(e^z-e^{\sqrt{2}}\right)^2},\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{e^{2\sqrt{2}}}\,.
$$

d) Siccome $f\left(-\sqrt{2}\right)=1$ abbiamo $h\left(-\sqrt{2}\right)=1$ oppure $h\left(-\sqrt{2}\right)=-1$. In ogni caso $\sqrt{2}$ è un polo semplice per $\dfrac{h(z)}{e^z-e^{-\sqrt{2}}}$ e, come nel primo residuo del punto *c*) abbiamo

$$
\begin{aligned}
Res\left(\frac{h(z)}{e^z-e^{-\sqrt{2}}},-\sqrt{2}\right)&=\lim_{z\to-\sqrt{2}}\frac{\left(z+\sqrt{2}\right)h(z)}{e^z-e^{-\sqrt{2}}}\\
&=h\left(-\sqrt{2}\right)\lim_{z\to\sqrt{2}}\frac{\left(z+\sqrt{2}\right)}{e^z-e^{-\sqrt{2}}}\\
&=h\left(-\sqrt{2}\right)\lim_{z\to-\sqrt{2}}\frac{1}{e^z}=\frac{h\left(-\sqrt{2}\right)}{e^{-\sqrt{2}}}\,.
\end{aligned}
$$

Dobbiamo ora stabilire se $h\left(-\sqrt{2}\right)=1$ o $h\left(-\sqrt{2}\right)=-1$. Mostriamo ora che $h\left(-\sqrt{2}\right)=-1$.

Osserviamo che l'intersezione dei domini di h e g è l'aperto $\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2\cup s_3)$ e tale intersezione ha due componenti connnesse. Sia U_+ la componennte connessa di $\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2\cup s_3)$ che contiene $\sqrt{2}$ e sia U_- quella che contiene $-\sqrt{2}$. Le restrizioni di g e h ad U_+ coincidono perché sono radici quadrate olomorfe di f su un connesso e hanno lo stesso valore nel punto $\sqrt{2}$ (si veda la soluzione del punto a)). Allo stesso modo, se $g\left(-\sqrt{2}\right)$ fosse uguale a $h\left(-\sqrt{2}\right)$ le restrizioni di g e h a U_- coinciderebbero. In questo caso g e h coinciderebbero nell'intersezione dei loro domini e "incollando" g sarebbe possibile definire una loro estensione olomorfa ϕ all'unione dei loro domini. Più precisamente sarebbe possibile definire una funzione olomorfa $\phi:\mathbb{C}\setminus s_1\cup\{-1\}\longrightarrow\mathbb{C}$ ponendo $\phi(z)=g(z)$ se $z\in\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_2)$ e $\phi(z)=h(z)$ se $z\in\mathbb{C}\setminus(s_1\cup s_3)$. Per costruzione ϕ sarebbe una radice quadrata di f su $\mathbb{C}\setminus s_1\cup\{-1\}$ e siccome $\lim\limits_{z\to-1} f(z)=0$ anche $\lim\limits_{z\to-1}\phi(z)=0$. Per il teorema di rimozione della singolarità ϕ si estenderebbe a una radice quadrata olomorfa $\widetilde{\phi}:\mathbb{C}\setminus s_1\to\mathbb{C}$ di f su $\mathbb{C}\setminus s_1$. Questo è assurdo perchè f ha uno zero semplice in -1.

In conclusione

$$Res\left(\frac{h(z)}{e^z-e^{-\sqrt{2}}},-\sqrt{2}\right)=\frac{-1}{e^{-\sqrt{2}}}=-e^{\sqrt{2}}\,.$$