NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2012/2013
Analisi Reale e Complessa, Test del 19.11.2012

1) Sia $E_o \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile con $|E_o| < +\infty$ e siano $E_1, E_2, \ldots$ insiemi misurabili contenuti in E_o tali che $|E_j| \geq \varepsilon > 0$ per ogni $j \geq 1$. Si verifichi che esiste un punto in $\mathbb{R}^n$ che appartiene ad infiniti E_j.

Indicazione: Si mostri che $\big|\overline{\lim_{j\to\infty}} E_j\big| \geq \varepsilon > 0$ e quindi $\overline{\lim_{j\to\infty}} E_j \neq \emptyset$.

2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x\,,y) := x\,y\,, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Mostrare che f è una funzione di Borel.

b) Stabilire se la controimmagine $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^2$ ha misura nulla per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}$ di misura nulla.

Indicazione: Per calcolare la misura di $f^{-1}(B)$ si può usare il teorema di Tonelli.

c) Stabilire se $f^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile per ogni $E \subset \mathbb{R}$ misurabile.

3) Si verifichi che la funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\frac{1-\cos(sx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

è derivabile. Si calcoli la derivata di F e si trovi poi il valore di $F(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Soluzioni:

1) **:** Ricordiamo che

$$\big|\overline{\lim_{j\to\infty}}\, E_j\big| \geq \overline{\lim_{j\to\infty}}\, |E_j| \geq \varepsilon > 0\ :$$

Poiché

$$E_o \supset \bigcup_{j\geq 1} E_j \supset \bigcup_{j\geq 2} E_j \supset \bigcup_{j\geq 3} E_j \supset\ ...$$

dove $|E_o| < +\infty$, applicando la proprietà di continuità monotona decrescente della misura di Lebesgue risulta

$$\begin{aligned}\big|\overline{\lim_{j\to\infty}}\, E_j\big| &= \Big|\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\geq k} E_j\Big| = \lim_{k\to\infty}\Big|\bigcup_{j\geq k} E_j\Big| \\ &\geq \lim_{k\to\infty}\sup_{j\geq k}|E_j| = \overline{\lim_{j\to\infty}}\, |E_j|\ .\end{aligned}$$

Di conseguenza $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\, E_j$ non è vuoto e se x è un suo elemento allora

$$x \in \bigcup_{j\geq k} E_j\,, \qquad k\geq 1\,.$$

Risulta successivamente

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{j\geq 1} E_j &\Longrightarrow x\in E_{j_1}\ \text{ per un }\ j_1\geq 1\,,\\ x \in \bigcup_{j\geq j_1+1} E_j &\Longrightarrow x\in E_{j_2}\ \text{ per un }\ j_2 > j_1\,,\\ x \in \bigcup_{j\geq j_2+1} E_j &\Longrightarrow x\in E_{j_3}\ \text{ per un }\ j_3 > j_2\,,\\ &....\end{aligned}$$

e concludiamo che $x\in E_{j_1}\cap E_{j_2}\cap E_{j_3}\cap\ ...$ dove $j_1<j_2<j_3<\ ...\ .$

Complemento: una applicazione.

Come applicazione del risultato dell'esercizio 1) dimostriamo il teorema seguente :

Teorema sulla limitatezza delle funzioni subadditive positive. *Sia* $f:\mathbb{R}\longrightarrow[\,0\,,+\infty)$ *una funzione subadditiva misurabile, cioè una funzione misurabile soddisfacente la condizione*

$$f(x+y)\leq f(x)+f(y)\,,\qquad x\,,y\in\mathbb{R}\,.$$

Allora f *è limitata su ogni sottoinsieme limitato di* $\mathbb{R}$ *.*

Supponiamo che non fosse così, cioè che f è illimitata su un intervallo $[a_o\,,a_o+b_o]$ con $a_o\,,b_o$ interi, $b_o>0$. Allora, poiché

$$[a_o\,,a_o+b_o]=\bigcup_{j=1}^{b_o}[a_o+j-1\,,a_o+j]\,,$$

esiste un $1\leq j_o\leq b_o$ tale che f è illimitata su $[a_o+j_o-1\,,a_o+j_o]$.

Indichiamo $a:=a_o+j_o-1$. Poiché f è illimitata su $[\,a\,,a+1]$, per ogni intero $k\geq 1$ esiste $x_k\in[\,a\,,a+1]$ con $f(x_k)\geq 2\,k$.

Sia $k\geq 1$ arbitrario. La misurabilità di f implica che l'insieme

$$E_k:=\left\{x\in\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\,;\,f(x)\geq k\right\}$$

è misurabile. Poiché

$$x\in\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\Longrightarrow x_k-x\in\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]$$

e, quale implicazione della subadditività di f,

$$\begin{aligned}&x\in\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\\ \Longrightarrow\;&2\,k\leq f(x_k)\leq f(x)+f(x_k-x)<k+f(x_k-x)\\ \Longrightarrow\;&f(x_k-x)>k\,,\end{aligned}$$

abbiamo

$$x\in\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\Longrightarrow x_k-x\in\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\,.$$

In altre parole

$$x_k-\left(\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\right)\subset E_k$$

e risulta

$$\left|\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\right| = \left|x_k - \left(\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\right)\right|$$
$$\leq |E_k|\ .$$

Ma $\left[\dfrac{x_k}{2}-1\,,\dfrac{x_k}{2}+1\right]$ è l'unione degli insiemi misurabili disgiunti E_k e $\left[\dfrac{x_k}{2}-1\,,\dfrac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k$, perciò

$$2 = \left|\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\right| = |E_k| + \left|\left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]\setminus E_k\right|$$
$$\leq 2\,|E_k|$$

e risulta :

$$|E_k| \geq 1\,.$$

Ora $E_1\,, E_2\,, \ldots$ sono insiemi misurabili contenuti in

$$E_o := \left[\frac{a}{2}-1\,,\frac{a+1}{2}+1\right] \supset \left[\frac{x_k}{2}-1\,,\frac{x_k}{2}+1\right]$$

e valgono le stime

$$|E_o| = \frac{3}{2} < +\infty\,, \qquad |E_k| \geq 1\,, k \geq 1\,.$$

Per il risultato dell'esercizio 1) risulta l'esistenza di un x appartenente ad infiniti E_k . Ma allora dobbiamo avere

$$f(x) \geq k \ \text{ per infiniti } k \geq 1\,,$$

cioè $f(x) = +\infty$, che non è vero perché f prende valori finiti. Questa contradizione mostra che l'ipotesi secondo quale f non è limitata su ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ è falsa.

Dimostriamo anche :

Teorema sulla linearità delle funzioni additive. *Sia* $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione additiva, cioè una funzione soddisfacente la condizione*

$$\lambda(x+y) = \lambda(x) + \lambda(y)\,, \qquad x\,, y \in \mathbb{R}\,,$$

che è limitata su un intervallo $[a\,,b]$ *con* $a<b$. *Allora* f *è lineare :*

$$\lambda(x) = x\,\lambda(1)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Verifichiamo prima che f è $\mathbb{Q}$-lineare :

Per ogni $x\,,y\in\mathbb{R}$ ed ogni interi $p\,,q\geq 1$ abbiamo

$$\lambda(p\,y) = \lambda\big(\underbrace{y+\,...\,+y}_{p}\big) = \underbrace{\lambda(y)+\,...\,+\lambda(y)}_{p} = p\,\lambda(y)$$

e quindi anche

$$\lambda(x) = \lambda\bigg(q\left(\frac{1}{q}x\right)\bigg) = q\,\lambda\bigg(\frac{1}{q}x\bigg) \iff \lambda\bigg(\frac{1}{q}\,x\bigg) = \frac{1}{q}\,\lambda(x)\,.$$

Di conseguenza

$$\lambda\bigg(\frac{p}{q}\,x\bigg) = \lambda\bigg(p\left(\frac{1}{q}\,x\right)\bigg) = p\,\lambda\bigg(\frac{1}{q}\,x\bigg) = \frac{p}{q}\,\lambda(x)\,.$$

D'altro canto,

$$\lambda(0) = \lambda(0+0) = \lambda(0)+\lambda(0) \Longrightarrow \lambda(0)=0$$

e, per ogni $z\in\mathbb{R}$,

$$\lambda(z)+\lambda(-z) = \lambda(0) = 0 \iff \lambda(-z) = \lambda(z)\,.$$

Risulta che l'ugualità

$$\lambda\bigg(\frac{p}{q}\,x\bigg) = \frac{p}{q}\,\lambda(x)$$

vale anche se p è un intero ≤ 0.

Ora verifichiamo che λ è limitata sull'intervallo $\left[-\,\dfrac{b-a}{2}\,,\dfrac{b-a}{2}\right]$:

Per ogni $x\in\left[-\,\dfrac{b-a}{2}\,,\dfrac{b-a}{2}\right]$ abbiamo

$$\begin{aligned}
|\lambda(x)| &= \left|\lambda\bigg(\Big(x+\frac{a+b}{2}\Big)-\frac{a+b}{2}\bigg)\right| \\
&\leq \left|\lambda\bigg(\underbrace{x+\frac{a+b}{2}}_{\in\,[a,b]}\bigg)\right| + \left|\lambda\bigg(-\,\frac{a+b}{2}\bigg)\right| \\
&\leq \sup_{y\in[a,b]}|\lambda(y)| + \left|\lambda\bigg(-\,\frac{a+b}{2}\bigg)\right| < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Usando la $\mathbb{Q}$-linearità di λ deduciamo che λ è limitata su $[-1\,,1]$:

Sia $q \geq 1$ un intero tale che $\dfrac{1}{q} \leq \dfrac{b-a}{2}$. Per ogni $x \in [-1\,,1]$ abbiamo $\left|\dfrac{1}{q}\,x\right| \leq \dfrac{b-a}{2}$ e così

$$\begin{aligned} |\lambda(x)| &= \left|\lambda\bigg(q\left(\frac{1}{q}\,x\right)\bigg)\right| = q\left|\lambda\bigg(\frac{1}{q}\,x\bigg)\right| \\ &\leq q \sup_{|y|\leq \frac{b-a}{2}} |\lambda(y)| < +\infty\,. \end{aligned}$$

Risulta che λ è di Lipschitz con costante di Lipschitz

$$L = \sup_{|x|\leq 1} |\lambda(x)|\ :$$

Basta dimostrare che

$$|\lambda(x)| \leq L\,|x| \ \text{ per ogni } \ x \in \mathbb{R}$$

perché allora

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| = |\lambda(x-y)| \leq L\,|x-y|\,, \qquad x\,,y \in \mathbb{R}\,.$$

Sia a questo fine $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Per ogni intero $q \geq 1$ esiste un unico intero $p \geq 0$ tale che

$$\frac{p}{q} \leq |x| < \frac{p+1}{q}$$

(p è la parte intera di $q\,|x|$) e risulta

$$\begin{aligned} |\lambda(x)| = \big|\lambda(|x|)\big| &= \left|\lambda\bigg(\frac{p}{q}\bigg) + \lambda\bigg(|x| - \frac{p}{q}\bigg)\right| \\ &\leq \frac{p}{q}\,\big|\lambda(1)\big| + \frac{1}{q}\,\big|\lambda\big(\underbrace{q\,|x| - p}_{\in[0,1)}\big)\big| \\ &\leq \frac{p}{q}\,L + \frac{1}{q}\,L \leq L\bigg(|x| + \frac{1}{q}\bigg)\,. \end{aligned}$$

Poiché $q \geq 1$ è arbitrario, concludiamo che $|\lambda(x)| \leq L\,|x|$.

A questo punto finiamo la dimostrazione rimarcando che la $\mathbb{Q}$-linearità e la continuità di λ implicano la sua $\mathbb{R}$-linearità.

I due teoremi precedenti implicano che

Qualsiasi funzione additiva e misurabile $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è necessariamente lineare e quindi dalla forma*

$$\lambda(x) = x\,\lambda(1)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Complemento: un controesempio.

Mostriamo che la condizione sulla misurabilità di f nel teorema sulla limitatezza delle funzioni subadditive positive è esenziale :

Teorema. *Esiste una funzione subadditiva* $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\,0\,,+\infty)$ *che non è limitata su nessun intervallo* $[\,a\,,b\,]$ *con* $a < b$. *Rimarchiamo che per il teorema sulla limitatezza delle funzioni subadditive positive questa funzione non sarà misurabile.*

Facendo notare che $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale sopra il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, sia $\mathcal{B}$ una base di questo spazio vettoriale. In altre parole $\mathcal{B}$ è un insieme di numeri reali tale che ogni $x \in \mathbb{R}$ è la combinazione $\mathbb{Q}$-lineare

$$x = \sum_{u \in \mathcal{B}} \lambda_u(x)\, u$$

degli elementi di $\mathcal{B}$ per una unica famiglia $\big(\lambda_u(x)\big)_{u \in \mathcal{B}}$ in $\mathbb{Q}$, zeri tranne per un numero finito $u \in \mathcal{B}$. Allora per ogni $u \in \mathcal{B}$ la funzione

$$\lambda_u : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \lambda_u(x) \in \mathbb{Q}$$

è un funzionale $\mathbb{Q}$-lineare non identicamente zero.

Dimostreremo nel seguito che le funzioni subadditive

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto |\lambda_u(x)| \in [\,0\,,+\infty)$$

sono illimitati su ogni intervallo $[\,a\,,b\,]$ con $a < b$. A questo fine basta verificare che se

$$\lambda : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \lambda(x) \in \mathbb{Q}$$

è un funzionale $\mathbb{Q}$-lineare tale che

$$\sup_{a\leq x\leq b} |\lambda(x)| < +\infty$$

per due numeri reali $a < b$, allora λ dev'essere identicamente zero.

Ma per il teorema sulla linearità delle funzioni additive λ risulta d'essere $\mathbb{R}$-lineare, cioè dalla forma

$$\lambda(x) = x\,\lambda(1)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché $x\,\lambda(1) = \lambda(x) \in \mathbb{Q}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dobbiamo avere $\lambda(1) = 0$ e risulta che λ si annulla identicamente.

2) : a) La funzione f è continua è quindi di Borel: la controimmagine di ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ è un insieme aperto in $\mathbb{R}^2$ e quindi un insieme di Borel.

b) Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme di Borel di misura nulla. Poiché f è una funzione di Borel, $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme di Borel e per il calcolo della sua misura possiamo usare il teorema di Tonelli :

Le sezioni

$$f^{-1}(B)_x = \big\{ y \in \mathbb{R}\,;\, (x,y) \in f^{-1}(B) \big\}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

sono insiemi di Borel, la funzione

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto |f^{-1}(B)_x| \in \big[0\,,+\infty\big]$$

è di Borel e

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f^{-1}(B)_x|\,\mathrm{d}x = |f^{-1}(B)|\,.$$

Ma per ogni $0 \neq x \in \mathbb{R}$ vale

$$f^{-1}(B)_x = \big\{ y \in \mathbb{R}\,;\, f(x,y) \in B \big\} = \big\{ y \in \mathbb{R}\,;\, xy \in B \big\} = \frac{1}{x}\,B$$

e quindi

$$|f^{-1}(B)_x| = \frac{1}{|x|}\,|B| = 0\,.$$

Cosicché la funzione

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto |f^{-1}(B)_x| \in \big[0\,,+\infty\big]$$

si annulla in ogni $0 \neq x \in \mathbb{R}$ e possiamo concludere che

$$\left| f^{-1}(B) \right| = \int\limits_{\mathbb{R}} |f^{-1}(B)_x| \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

c) Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile. Allora esiste un insieme F_σ $A \subset E$ tale che $B := E \setminus A$ sia di misura nulla. Poiché f è di Borel, $f^{-1}(A)$ è di Borel. D'altro canto abbiamo visto in b) che la controimmagine $f^{-1}(B)$ dell'insieme di misura nulla B è di misura nulla in $\mathbb{R}^2$ e quindi misurabile. Risulta che $f^{-1}(E) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$.

3) : Si vede facilmente che

$$\frac{1 - \cos(sx)}{x} = \frac{2 \sin^2 \dfrac{sx}{2}}{x} = \left| s \, \frac{\sin \dfrac{sx}{2}}{\dfrac{sx}{2}} \, \sin \frac{sx}{2} \right| \leq |s| \, , \qquad x > 0 \quad (*)$$

e di conseguenza la funzione positiva continua

$$(0 \, , +\infty) \ni x \longmapsto e^{-x} \, \frac{1 - \cos(sx)}{x}$$

si maggiora con la funzione sommabile

$$(0 \, , +\infty) \ni x \longmapsto |s| \, e^{-x} \, .$$

Risulta che la funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è ben definita.

Rimarchiamo che usando (*) si può verificare subito la continuità di F, anche se risulterà poi automaticamente dalla derivabilità di F:

Sia $s_o > 0$ arbitrario. Poiché le funzioni

$$[-s_o \, , s_o] \ni s \longmapsto e^{-x} \, \frac{1 - \cos(sx)}{x} \, , \qquad x \in (0, +\infty)$$

sono continue ed abbiamo la maggiorazione uniforme

$$e^{-x} \, \frac{1 - \cos(sx)}{x} \leq s_o e^{-x} \, , \qquad x \in (0, +\infty) \, , \, s \in [-s_o \, , s_o] \, ,$$

per il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali risulta la continuità di F in $[-s_o \, , s_o]$.

Ora la continuità di F in ogni $[-s_o \, , s_o]$, $s_o > 0$, è equivalente alla sua continuità in $\mathbb{R}$.

Per la derivabilità di F verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni del teorema sulla dipendenza differenziabile da parametri reali.

Anzitutto abbiamo già visto che

$$(0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-x}\,\frac{1-\cos(sx)}{x} \quad \text{è sommabile per ogni } s\in\mathbb{R}\,.$$

Poi esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-x}\,\frac{1-\cos(sx)}{x}\right) = e^{-x}\sin(sx)\,, \qquad x>0\,,\; s\in\mathbb{R}$$

ed abbiamo la maggiorazione uniforme

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-x}\,\frac{1-\cos(sx)}{x}\right)\right| = \left|e^{-x}\sin(sx)\right| \leq e^{-x}$$

dove la funzione e^{-x} è sommabile su $(0,+\infty)$.

Così possiamo applicare il teorema sulla dipendenza differenziabile da parametri reali concludendo che F è derivabile e

$$F'(s) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-x}\,\frac{1-\cos(sx)}{x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin(sx)\,\mathrm{d}x\,, \quad s\in\mathbb{R}\,.$$

Per calcolare $F'(s)$ calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^{-x}\sin(sx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tramite integrazione ripetuta per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int e^{-x}\sin(sx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\int \sin(sx)\,\mathrm{d}e^{-x}\\
&= -\,e^{-x}\sin(sx) + s\int e^{-x}\cos(sx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\,e^{-x}\sin(sx) - s\int \cos(sx)\,\mathrm{d}e^{-x}\\
&= -\,e^{-x}\sin(sx) - s\,e^{-x}\cos(sx) - s^2\int e^{-x}\sin(sx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

da dove deduciamo che

$$\int e^{-x} \sin(sx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+s^2}\, e^{-x}\big(\sin(sx) + s\cos(sx)\big)\ .$$

Risulta

$$F'(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin(sx)\,\mathrm{d}x = \frac{s}{1+s^2}\ , \qquad s \in \mathbb{R}\ . \qquad (**)$$

Ora (**) implica che

$$F(s) = \int \frac{s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln(1+s^2) + C\ .$$

Per determinare la costante C osserviamo che $F(0) = 0$ implica

$$0 = \frac{1}{2}\ln(1+0^2) + C\ ,$$

cioè $C = 0$. Di conseguenza

$$F(s) = \frac{1}{2}\ln(1+s^2)\ .$$