

NOME: MATRICOLA:

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
Analisi Reale e Complessa, Test del 22.01.2010

1) (1) Sia w un numero complesso. Si trovi una condizione per e^w che sia equivalente alla proprietà $\operatorname{Re} w \geq 0$.

(2) Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua che è olomorfa in D . Si dimostri che se

$$\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \quad z \in \partial D$$

allora

$$\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \quad z \in \overline{D}.$$

Se, oltre a ciò, $\operatorname{Re} f(z_0) = 0$ per un $z_0 \in D$, allora f è costante.

2) Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, una successione di funzioni olomorfe che

è localmente uniformemente limitata e

converge puntualmente ad una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

Si dimostri che allora f è olomorfa.

3) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

usando il teorema integrale di Cauchy per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

- 1) : (1) Siano u la parte reale e v la parte immaginaria di w , cioè $w = u + vi$ con $u, v \in \mathbb{R}$. Allora

$$|e^w| = |e^{u+vi}| = |e^u e^{vi}| = |e^u| \cdot |e^{vi}| = e^u,$$

e poiché

$$u \geq 0 \iff e^u \geq 1,$$

abbiamo

$$\operatorname{Re} w \geq 0 \iff |e^w| \geq 1 \iff |e^{-w}| \leq 1.$$

- (2) Definiamo la funzione $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tramite la formula

$$g(z) := e^{-f(z)}.$$

Per (1) di cui sopra abbiamo

$$|g(z)| \leq 1 \iff \operatorname{Re} f(z) \geq 0,$$

in particolare

$$|g(z)| \leq 1, \quad z \in \partial D.$$

D'altro canto, poiché l'insieme chiuso limitato $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ è compatto, la funzione continua $\overline{D} \ni z \mapsto |g(z)|$ ha (almeno) un punto di massimo $z_o \in \overline{D}$.

Se $z_o \in \partial D$, allora abbiamo per ogni $z \in \overline{D}$

$$|e^{-f(z)}| = |g(z)| \leq |g(z_o)| \leq 1,$$

cioè $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$.

Se invece $z_o \in D$, allora per il teorema del massimo modulo g è costante e risulta per ogni $z \in \overline{D}$

$$e^{-f(z)} = g(z) = g(z_o) = e^{-f(z_o)} \iff e^{f(z)-f(z_o)} = 1,$$

cioè $f(z) = f(z_o) + 2k\pi i$ per un $k \in \mathbb{Z}$. Ma l'insieme $\{f(z); z \in \overline{D}\}$ è un'immagine continua dell'insieme connesso \overline{D} e quindi è connesso.

Risulta che dobbiamo avere

$$f(z_o) \in \{f(z); z \in \overline{D}\} \subset \{f(z_o) + 2k\pi i\}$$

per un $k \in \mathbb{Z}$ che non può essere che $k = 0$. In altre parole f è costante.

2) : Basta dimostrare che, se $z_o \in D$ e $r > 0$ sono tali che la chiusura del disco aperto

$$U_r(z_o) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_o| < r\}$$

è contenuta in D e la successione $(f_n)_{n \geq 1}$ è uniformemente limitata in

$$\overline{U_r(z_o)} = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_o| \leq r\} \subset D,$$

allora f è olomorfa in $U_r(z_o)$.

Prima soluzione:

Per la formula integrale di Cauchy abbiamo

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_o)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad n \geq 1, z \in U_r(z_o)$$

ed il teorema della convergenza dominata implica anche per la funzione limite f :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_o)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in U_r(z_o).$$

Ora lo sviluppo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_o) - (z - z_o)} = \frac{1}{\zeta - z_o} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_o}{\zeta - z_o}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_o)^{n+1}} (z - z_o)^n, \quad \zeta \in \partial U, x \in U \end{aligned}$$

implica lo sviluppo di f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_o)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_o)^n$$

dove la serie di potenze alla parte destra converge per ogni $z \in U_r(z_o)$. In particolare f è olomorfa in $U_r(z_o)$.

Seconda soluzione:

Per il teorema di Paul Montel esiste una sottosuccessione di $(f_n)_{n \geq 1}$ che converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di D ad

una funzione olomorfa $g : D \rightarrow \mathbb{C}$. Di conseguenza la funzione $f = g$ è olomorfa.

3) : Per $r > 0$ indichiamo con $\partial^+ U_r^+(0)$ e $\partial^- U_r^+(0)$ il semicerchio

$$\{z \in \mathbb{C}; |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

orientato in senso antiorario rispettivamente orario :

$$\partial^+ U_r^+(0) \text{ è la curva } [0, \pi] \ni t \mapsto r e^{it} \in \mathbb{C},$$

$$\partial^- U_r^+(0) \text{ è la curva } [0, \pi] \ni t \mapsto r e^{i(\pi-t)} = -r e^{-it} \in \mathbb{C}.$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < r$ e consideriamo la curva chiusa $\gamma_{\varepsilon, r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r, -\varepsilon]$,

il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,

il segmento $[\varepsilon, r]$,

il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Per il teorema integrale di Cauchy abbiamo

$$0 = \int_{\gamma_{\varepsilon, r}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

quindi

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Ora per il lemma di Jordan abbiamo

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

e risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{1}{z} dz \\
&= \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + \pi i .
\end{aligned}$$

Successivamente, poiché esiste il limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} - 1}{z} = i ,$$

la funzione $z \mapsto \frac{e^{iz} - 1}{z}$ ha singolarità eliminabile in 0 e quindi è limitata in un intorno di 0. Risulta che

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = 0$$

e concludiamo :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \pi i .$$

Rimarco: Poiché $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ e

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{\cos x}{x} dx &= 0 , \\
\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin x}{x} dx &= 2 \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin x}{x} dx ,
\end{aligned}$$

abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$