NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2011/2012
Analisi Reale e Complessa, Test del 25.11.2011

1) Siano $I = [0\,,1]$, C l'insieme di Cantor, e V un insieme diVitali.

a) Mostrare che $\big|V \times V\big|_i = \big|V\big|_i^2$ e che $\big|V \times V\big|_e \leq \big|V\big|_e^2$.

b) Stabilire se $I \times V\,, C \times V\,, V \times V$ sono misurabili.

c) Stabilire se la misura interna di V è nulla.

2) Sia $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$G(x\,,y) := \big(x - y - |y|\,,y\big)\,, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si dimostri che per ogni funzione misurabile $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la composizione $f \circ G$ è misurabile.

3) Si verifichi che la funzione $F : \big[0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \geq 0$$

è continua ed è due volte derivabile in $\big(0\,,+\infty\big)$. Si calcoli la seconda derivata in ogni $s \in \big(0\,,+\infty\big)$.

Soluzioni:

1) **:** a) Ricordiamo che la misura interna (di Lebesgue) di $E \subset \mathbb{R}^n$ è

$$|E|_i := \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ chiuso}}} |F| \, .$$

Ma, per la continuità monotona (crescente) della misura di Lebesgue, abbiamo per ogni insieme chiuso $F \in \mathbb{R}^n$

$$\big| F \cap [-k\,,k]^n \big| \xrightarrow{k \to +\infty} |F| \, ,$$

ove gli insiemi $F \cap [-k\,,k]^n$ sono compatti. Risulta che abbiamo anche a formula

$$|E|_i = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compatto}}} |K| \, .$$

Mostriamo ora che

$$|E \times E|_i = |E|_i^2 \ :$$

Per ogni compatti $K_1\,, K_2 \subset E$ l'insieme $K_1 \times K_2$ è compatto e contenuto in $E \times E$, perciò abbiamo

$$|K_1|\,|K_2| = |K_1 \times K_2| \leq |E \times E|_i \, .$$

Risulta

$$\begin{aligned} |E|_i^2 &= \sup_{\substack{K_1 \subset E \\ K_1 \text{ compatto}}} |K_1| \cdot \sup_{\substack{K_2 \subset E \\ K_2 \text{ compatto}}} |K_2| \\ &= \sup_{\substack{K_1\,, K_2 \subset E \\ K_1\,, K_2 \text{ compatti}}} |K_1|\,|K_2| \leq |E \times E|_i \, . \end{aligned}$$

Per dimostrare la disuguaglianza reciproca, sia ora $C \subset E \times E$ un insieme compatto. La proiezione C_1 di $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sul primo fattore cartesiano $\mathbb{R}^n$ e la proiezione C_2 di C sul secondo fattore cartesiano $\mathbb{R}^n$ sono compatti quale immagini continue dell'insieme compatto C. Poiché

$$C \subset C_1 \times C_2 \ \text{ e } \ C_1\,, C_2 \subset E,$$

abbiamo

$$|C| \leq |C_1 \times C_2| = |C_1|\,|C_2| \leq |E|_i^2 \,.$$

Di conseguenza vale anche

$$|E \times E|_i = \sup_{\substack{C \subset E \times E \\ C \text{ compatto}}} |C| \leq |E|_i^2 \,.$$

Ora ricordiamo che la misura esterna (di Lebesgue) di $E \subset \mathbb{R}^n$ è

$$|E|_e := \inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ aperto}}} |U| \,.$$

Risulta :

$$|E \times E|_e \leq |E|_e^2 \ :$$

Per ogni aperti $U_1 \,, U_2 \supset E$ l'insieme $U_1 \times U_2$ è aperto e contenente $E \times E$, perciò

$$|E \times E|_e \leq |U_1 \times U_2| = |U_1|\,|U_2| \,.$$

Cosicché

$$\begin{aligned} |E \times E|_e &\leq \inf_{\substack{E \subset U_1 \,, U_2 \\ U_1 \,, U_2 \text{ aperti}}} |U_1|\,|U_2| \\ &= \inf_{\substack{E \subset U_1 \\ U_1 \text{ aperto}}} |U_1| \ \cdot \inf_{\substack{E \subset U_2 \\ U_2 \text{ compatto}}} |U_2| = |E|_e^2 \,. \end{aligned}$$

b) Ricordiamo che, per $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^k$, se $A \times B$ è misurabile e $|A|_e > 0$ allora B è misurabile :

Infatti, per il teorema di Fubini-Tonnelli l'insieme

$$(A \times B)_x = \big\{ y \in \mathbb{R}^k \,;\, (x \,, y) \in A \times B \big\} = \begin{cases} B & \text{per } x \in A \\ \emptyset & \text{per } x \notin A \end{cases} .$$

è misurabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e poiché A non è di misura nulla, esiste $x \in A$ con $(A \times B)_x$ misurabile.

In particolare, poiché $I \subset \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}$ non sono di misura nulla e $V \subset \mathbb{R}$ non è misurabile, gli insiemi $I \times V \subset \mathbb{R}^2$ e $V \times V \subset \mathbb{R}^2$ non possono essere misurabili.

D'altro canto, siccome l'insieme di Cantor $C \subset \mathbb{R}$ è di misura nulla, l'insieme prodotto $C \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ è di misura nulla e la stessa cosa vale per ogni sottoinsieme di $C \times \mathbb{R}$, fra quali anche per $C \times V$. Cosicché $C \times V$ è misurabile.

c) Mostreremo che la misura di qualsiasi sottoinsieme misurabile di V ha misura nulla ed allora risulta :

$$|V|_i = \sup_{\substack{F \subset V \\ F \text{ chiuso}}} |F| = 0 .$$

Sia quindi $E \subset V$ misurabile.

Ricordiamo la definizione di V: considerata la relazione di equivalenza in $\mathbb{R}$ definita da

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} ,$$

scegliamo in ogni classe di equivalenza un numero appartenente a $[0\,,1)$ ed indichiamo con V l'insieme dei numeri scelti. Allora, se $\{r_1\,,r_2\,,\,...\}$ è l'insieme dei numeri razionali in $[0\,,1)$, allora gli insiemi

$$r_k + V\,, \qquad k \geq 1$$

sono a due a due disgiunti e la loro unione è contenuta in $[0\,,2)$.

Di conseguenza,

$$r_k + E\,, \qquad k \geq 1$$

sono insiemi misurabili a due a due disgiunti con l'unione contenuta in $[0\,,2)$ ed usando la σ-additività della misura di Lebesgue risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\,r_k + E| = \left| \bigcup_{k=0}^{\infty} (r_k + E) \right| \leq \big|[0\,,2)\big| = 2\,.$$

In particolare

$$|\,r_k + E| \longrightarrow 0\,.$$

Ma la misura di Lebesgue è invariante sotto le traslazioni e quindi $|\,r_k + E| = |E|$ per ogni $k \geq 1$. Perciò $|E| = 0$.

2) : L'applicazione $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è invertibile e l'applicazione inversa si trova risolvendo l'equazione vettoriale

$$\big(x - y - |y|\,, y\big) = \big(u\,, v\big)\,,$$

cioè il sistema di equazioni scalari

$$\begin{cases} x - y - |y| & = & u \\ y & = & v \end{cases} .$$

Risulta

$$G^{-1}(u\,,v) = \big(u + v + |v|\,,v\big)\,.$$

Per verificare la misurabilità di $f \circ G$ dobbiamo provare che l'insieme

$$(f \circ G)^{-1}(U) = G^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$$

è misurabile per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}$. Ma, per la misurabilità della funzione f, l'insieme $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile, quindi basta verificare che la controimmagine $G^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^2$ di qualsiasi insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile. (Rimarchiamo che questa proprietà è più forte della misurabilità dell'applicazione G, che richiede la misurabilità di $G^{-1}(E)$ solo per gli insiemi di Borel E !)

Questo risulterà applicando il teorema seguente (Teorema 3.33 nel libro R.L. Wheeden - A. Zygmund: Measure and Integral, discusso anche alle lezioni) :

Se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una applicazione di Lipschitz, allora l'insieme $T(E) \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile.

A questo fine resta solo a verificare che l'applicazione $G^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è di Lipschitz : abbiamo per ogni $(u\,,v)\,,(u'\,,v') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&\big|G^{-1}(u\,,v) - G^{-1}(u'\,,v')\big|^2 \\
&= \big(u + v + |v| - u' - v' - |v'|\big)^2 + (v - v')^2 \\
&\leq \Big(|u - u'| + |v - v'| + \underbrace{\big||v| - |v'|\big|}_{\leq |v - v'|}\Big)^2 + (v - v')^2 \\
&\leq \big(|u - u'| + 2\,|v - v'|\big)^2 + (v - v')^2 \\
&= (u - u')^2 + 4\,(v - v')^2 + \underbrace{4\,|u - u'|\,|v - v'|}_{\leq 4\,(u-u')^2 + (v-v')^2} + (v - v')^2 \\
&\leq 5\,(u - u')^2 + 6\,(v - v')^2 \leq 6\,\big(u - u')^2 + (v - v')^2\big) \\
&= 6\,\big|(u\,,v) - (u'\,,v')\big|^2 ,
\end{aligned}$$

cioè

$$\left| G^{-1}(u\,,v) - G^{-1}(u'\,,v') \right| \leq \sqrt{6}\left| (u\,,v) - (u'\,,v') \right| .$$

3) : Siccome

$$0 \leq e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (0,1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \in [1,+\infty) \end{cases} \qquad s \geq 0\,,$$

ove la funzione (non dipendente da s!)

$$(0,+\infty) \ni x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \in [1,+\infty) \end{cases}$$

è integrabile su $(0,+\infty)$, e le funzioni

$$[0,+\infty) \ni s \longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2} \in \mathbb{R}\,, \qquad x \in (0,+\infty)$$

sono continue, la funzione F è ben definita e continua.

La derivabilità di $F(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile in ogni $s \in (0,+\infty)$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = -\,e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,, \qquad x > 0\,,\ s > 0$$

e, per $x > 0\,, s \geq \varepsilon > 0$, abbiamo la maggiorazione

$$\left| \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| = e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x} = e^{-sx}\frac{\sin x}{x}\sin x \leq e^{-sx} \leq e^{-\varepsilon x}$$

dove la funzione $e^{-\varepsilon x}$ è integrabile su $(0,+\infty)$. Così F risulta derivabile in ogni $s \in (0,+\infty)$ ed abbiamo

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ora anche la derivabilità di $F'(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile in ogni $s \in (0,+\infty)$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x} \right) = -\,e^{-sx}\sin^2 x\,, \qquad x > 0\,,\ s > 0$$

e, per $x > 0\,, s \geq \varepsilon > 0\,,$ abbiamo la maggiorazione

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-sx} \frac{\sin^2 x}{x} \right) \right| \leq e^{-sx} \leq e^{-\varepsilon x}$$

dove la funzione $e^{-\varepsilon x}$ è integrabile su $(0, +\infty)\,.$ Così F' è derivabile in ogni $s \in (0, +\infty)$ ed abbiamo

$$\begin{aligned}
F''(s) &= (F')'(s) \\
&= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-sx} \frac{\sin^2 x}{x} \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x \qquad (*) \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(2x) \, \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Il primo integrale si calcola facilmente:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,.$$

Per calcolare il secondo integrale, calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^{-sx} \cos(2x) \, \mathrm{d}x\,.$$

Tramite integrazione ripetuta per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int e^{-sx} \cos(2x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{s} \int \cos(2x) \, \mathrm{d}e^{-sx} \\
&= -\frac{1}{s} e^{-sx} \cos(2x) - \frac{2}{s} \int e^{-sx} \sin(2x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{s} e^{-sx} \cos(2x) + \frac{2}{s^2} \int \sin(2x) \, \mathrm{d}e^{-sx} \\
&= -\frac{1}{s} e^{-sx} \cos(2x) + \frac{2}{s^2} e^{-sx} \sin(2x) - \frac{4}{s^2} \int e^{-sx} \cos(2x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

da dove deduciamo che

$$\begin{aligned}\int e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1+\dfrac{4}{s^2}}\,e^{-sx}\Big(-\frac{1}{s}\cos(2x)+\frac{2}{s^2}\sin(2x)\Big)\\ &= \frac{e^{-sx}}{s^2+4}\Big(2\sin(2x)-s\cos(2x)\Big)\,.\end{aligned}$$

Risulta

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{s}{s^2+4}$$

e così (*) implica

$$F''(s) = \frac{1}{2\,s} - \frac{s}{2\,(s^2+4)} = \frac{2}{s\,(s^2+4)}\;. \qquad (**)$$

Rimarco 1. Usando (**) possiamo calcolare esplicitamente prima $F'(s)$, e poi $F(s)$, per ogni $s\in(0,+\infty)$.
Infatti,

$$F''(s) = \frac{1}{2\,s} - \frac{s}{2\,(s^2+4)} = \frac{1}{2\,s} - \frac{(s^2+4)'}{4\,(s^2+4)}\,,$$

implica

$$F'(s) = \frac{1}{2}\ln s - \frac{1}{4}\ln(s^2+4) + C_1 = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4} + C_1\,.$$

Per determinare la costante C_1, rimarchiamo che

$$\begin{aligned}|F'(s)| &= \left|\,\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\Big(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\Big)\mathrm{d}x\right| = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,, \qquad s>0\end{aligned}$$

implica $\lim\limits_{s\to+\infty}F'(s)=0$. Poiché anche $\lim\limits_{s\to+\infty}\ln\dfrac{s^2}{s^2+4}=0$, risulta che $C_1=0$ e così

$$F'(s) = \frac{1}{4} \ln \frac{s^2}{s^2+4}\,, \qquad s > 0\,.$$

Per trovare una formula esplicita anche per $F(s)$, calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \ln\bigl(s^2+\alpha^2\bigr)\,\mathrm{d}s\,, \qquad \alpha \geq 0\ :$$

tramite itegrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \ln\bigl(s^2+\alpha^2\bigr)\,\mathrm{d}s &= s\,\ln\bigl(s^2+\alpha^2\bigr) - \int s\,\frac{2\,s}{s^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}s \\
&= s\,\ln\bigl(s^2+\alpha^2\bigr) - \int \frac{2\,(s^2+\alpha^2) - 2\,\alpha^2}{s^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}s \\
&= s\,\ln\bigl(s^2+\alpha^2\bigr) - 2\,s + 2\,\alpha \int \frac{1}{\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)^2+1}\,\mathrm{d}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \\
&= s\,\ln\bigl(s^2+\alpha^2\bigr) - 2\,s + 2\,\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{s}{\alpha} + C\,.
\end{aligned}$$

Risulta per $F(s)$, $s > 0$, che è una primitiva di

$$\frac{1}{4}\,\ln\frac{s^2}{s^2+4} = \frac{1}{4}\,\ln s^2 - \frac{1}{4}\,\ln\bigl(s^2+4\bigr)\,,$$

la formula

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{4}\Bigl(s\,\ln s^2 - 2\,s\Bigr) - \frac{1}{4}\Bigl(s\,\ln\bigl(s^2+4\bigr) - 2\,s + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{2}\Bigr) + C_2 \\
&= \frac{1}{4}\,s\,\ln s^2 - \frac{1}{4}\,s\,\ln\bigl(s^2+4\bigr) - \mathrm{arctg}\,\frac{s}{2} + C_2 \\
&= \frac{1}{4}\,s\,\ln\frac{s^2}{s^2+4} - \mathrm{arctg}\,\frac{s}{2} + C_2\,.
\end{aligned}$$

Per determinare la costante C_2, usiamo la stima

$$\begin{aligned}
|F(s)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \right| = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,, \qquad s > 0
\end{aligned}$$

che implica $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$. Poiché

$$\lim_{s\to+\infty} s \ln \frac{s^2}{s^2+4} = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \ln \frac{1}{\left(1+\dfrac{4}{s^2}\right)^{s^2}} = 0 \cdot \ln \frac{1}{e^4} = 0$$

e

$$\lim_{s\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{s}{2} = \frac{\pi}{2} ,$$

risulta $0 = 0 - \dfrac{\pi}{2} + C_2$, cioè $C_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Di conseguenza

$$F(s) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{2} + \frac{s}{4} \ln \frac{s^2}{s^2+4} , \qquad s > 0 .$$

Rimarco 2. Poiché la funzione $F : \big[0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, la formula precedente vale anche per $s = 0$ e risulta

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{2} + \frac{s}{4} \ln \frac{s^2}{s^2+4} , \qquad s \geq 0 .$$

In particolare

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} .$$