NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2011/2012
Analisi Reale e Complessa, Test del 27.01.2012

1) Si dia un esempio di

(i) un dominio semplicemente connesso D di $\mathbb{C}$ non contenente l'origine,

(ii) una determinazione olomorfa log del logaritmo su D e

(iii) due punti $z_1 \neq z_2$ in D con il prodotto $z_1 z_2$ contenuto in D

tali che

$$\log (z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2 \, .$$

2) Si mostri che se $D \subset \mathbb{C}$ è un dominio e l'immagine di una funzione olomorfa f definita su D contiene una circonferenza

$$\big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \, |z - z_o| = r \big\} \, , \qquad z_o \in \mathbb{C} \, , r > 0$$

allora esistono $0 < r_1 < r < r_2$ tali che la corona circolare aperta

$$\big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \, r_1 < |z - z_o| < r_2 \big\}$$

è ancora contenuta nell'immagine di f.

3) Trovare i poli e gli sviluppi in serie di Laurent centrati in tali poli delle seguenti funzioni :

$$\frac{z^2}{z+1}\,, \qquad \frac{1+\sin z}{z+\pi}\,.$$

4) Si calcolino, per ogni $a > 0$, gli integrali impropri

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{-r}^{r} \frac{\cos(ax)}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{-r}^{r} \frac{\sin(ax)}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

integrando la funzione meromorfa

$$z \longmapsto \frac{e^{iaz}}{z^2+z+1}$$

lungo una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore ed usando il teorema dei residui.

Soluzioni:

1) **:** Una determinazione olomorfa del logaritmo possiamo definire su ogni dominio semplicemente conneso che non contiene l'origine. Solitamente si lavora con determinazioni definite sul piano tagliato lungo un raggio che parte dall'origine

$$\left\{ re^{i\theta_o} \, ; \, r \geq 0 \right\} , \qquad \theta_o \in \mathbb{R} \, ,$$

cioè sul dominio semplicemente connesso

$$D_{\theta_o} := \left\{ re^{i\theta} \, ; \, \theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi \right\} \, .$$

Per ogni intero k_o abbiamo una determinazione del logaritmo :

$$D_{\theta_o} \ni re^{\theta} \longmapsto \ln r + i\,(\theta + 2\pi\, k_o) \, .$$

Ricordiamo due modi per verificare l'olomorfia della funzione

$$f_{\theta_o,k_o} : D_{\theta_o} \ni re^{\theta} \longmapsto \ln r + i\,(\theta + 2\pi\, k_o) \, .$$

Una possibilità sarebbe osservando che f_{θ_o,k_o} è la funzione inversa della funzione olomorfa

$$\left\{ w \in \mathbb{C} \, ; \, \theta_o + 2\pi\, k_o < \operatorname{Im} w < \theta_o + 2\pi\,(k_o + 1) \right\} \ni z \longmapsto e^{w}$$

di cui le derivate non si annullano ed applicando poi il teorema sull'olomorfia dell funzioni inverse (vedi, per esempio, gli appunti C. Rea: *Analisi reale e complessa*, Capitolo 6, Osservazione 0.1 - sulla pagina 79).

Un'altra possibilità è di verificare direttamente che f_{θ_o,k_o} soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann. A questo fine ci conviene scrivere le equazioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari (vedi anche gli appunti C. Rea: *Analisi reale e complessa*, Capitolo 6, Esercizio 0.1.11 - sulle pagine 77-78) :

Sia $f(x + i\,y) = u(x\,,y) + i\,v(x\,,y)$ una funzione di classe C^1 definita su un dominio complesso non contenente l'origine. Allora (nel caso generale solo localmente) possiamo passare a coordinate polari tramite la sostituzione

$$x = r\cos\theta \, , \quad y = r\sin\theta \, .$$

Indichiamo

$u(r\,,\theta) := u(r\cos\theta\,, r\sin\theta)\,, \quad v(r\,,\theta) := v(r\cos\theta\,, r\sin\theta)\,.$
La matrice delle derivate parziali della trasformazione

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

essendo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

la matrice della trasformazione inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$$

sarà

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Per la regola della catena risulta

$$\operatorname{grad} u(x\,,y) = \operatorname{grad} u(r\,,\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix},$$

quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\,.$$

Similmente,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\,,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\,.$$

Risulta che le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

si scrivono in coordinate polari come segue :

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} = -\,\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\,.$$

Sommando il prodotto della prima equazione con $\cos\theta$ al prodotto della seconda equazione con $\sin\theta$, e poi il prodotto della prima equazione con $-\sin\theta$ al prodotto della seconda equazione con $\cos\theta$, otteniamo il sistema equivalente

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}\,. \tag{*}$$

Questa è la forma usuale delle equazioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari.

Ora la parte reale e la parte immaginaria di f_{θ_o,k_o} in coordinate polari sono $u(r,\theta) = \ln\, r$ rispettivamente $v(r,\theta) = \theta + 2\,\pi\, k_o$. Risultano

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 1$$

e si vede subito che f_{θ_o,k_o} soddisfà le equazioni di Cauchy-Riemann come rappresentate in (*) .

Ma ritorniamo al compito.

Per qualsiasi θ_o, se $|k_o|$ è abbastanza grande, per la determinazione

$$D_{\theta_o} \ni re^{\theta} \longmapsto \log re^{\theta} = \ln r + i\,(\theta + 2\pi\, k_o)$$

del logaritmo abbiamo

$$\log\,(z_1 z_2) \neq \log\, z_1 + \log\, z_2 \ \text{ per ogni } \ z_1\,, z_2 \in D_{\theta_o}\,.$$

Infatti, poiché abbiamo

$$\theta_o + 2\pi\, k_o < \mathrm{Im}\,\log\, z < \theta_o + 2\pi\,(k_o+1) \ \text{ per ogni } \ z \in D_{\theta_o}\,,$$

risulta per qualsiasi $z_1\,, z_2 \in D_{\theta_o}$:

$$\mathrm{Im}\,\log\,(z_1 z_2) \in \Big(\theta_o + 2\pi\, k_o\,, \theta_o + 2\pi\,(k_o+1)\Big)\,,$$
$$\mathrm{Im}\,\big(\log\, z_1 + \log\, z_2\big) \in \Big(2\,\theta_o + 4\pi\, k_o\,, 2\,\theta_o + 4\pi\,(k_o+1)\Big)$$

e per avere sempre $\log\,(z_1 z_2) \neq \log\, z_1 + \log\, z_2$ basta scegliere k_o tale valga o

$$\theta_o + 2\pi\,(k_o+1) \leq 2\,\theta_o + 4\pi\, k_o \iff 1 - \frac{\theta_o}{2\pi} \leq k_o\,,$$

oppure

$$2\theta_o + 4\pi(k_o+1) \leq \theta_o + 2\pi k_o \iff k_o \leq 2 - \frac{\theta_o}{2\pi} .$$

Ma anche per determinazioni meno esotiche del logaritmo possiamo avere

$$\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2 .$$

Per esempio, con $\theta_o = 0$ e $k_o = 0$, cioè per la determinazione

$$\left\{ re^{i\theta} ;\, 0 < \theta < 2\pi \right\} \ni re^{\theta} \longmapsto \log re^{\theta} = \ln r + i\theta ,$$

abbiamo

$$\log\left(e^{\pi i} e^{\frac{3\pi}{2} i}\right) = \frac{\pi}{2} i \neq \pi i + \frac{3\pi}{2} i = \log\left(e^{\pi i}\right) + \log\left(e^{\frac{3\pi}{2} i}\right) .$$

2) : Indichiamo il disco aperto con centro in $z_o \in \mathbb{C}$ e di raggio $\rho > 0$ con $U_\rho(z_o)$ e la circonferenza che è la sua frontiera con $\partial U_\rho(z_o)$:

$$\begin{aligned} U_\rho(z_o) &= \left\{ z \in \mathbb{C} ;\, |z - z_o| < \rho \right\} , \\ \partial U_\rho(z_o) &= \left\{ z \in \mathbb{C} ;\, |z - z_o| = \rho \right\} . \end{aligned}$$

Per l'ipotesi $f(D) \supset \partial U_r(z_o)$, perciò la funzione f non è costante. Il teorema dell'applicazione aperta implica che la sua immagine $f(D)$ è un insieme aperto. In altre parole il suo complementare $F = \mathbb{C} \setminus f(D)$ è un insieme chiuso.

Ora possiamo finire la dimostrazione in due modi diversi.

Usando la distanza tra due insiemi.

Se $f(D) = \mathbb{C}$ allora abbiamo $\left\{ z \in \mathbb{C} ;\, r_1 < |z - z_o| < r_2 \right\} \subset f(D)$ per qualsiasi $0 < r_1 < r < r_2$. Se invece $f(D) \neq \mathbb{C}$, cioè $F \neq \emptyset$, allora la distanza

$$\varepsilon := d(\partial U_r(z_o), F) = \inf \left\{ |z - z'| ;\, z \in \partial U_r(z_o), z' \in F \right\}$$

tra $\partial U_r(z_o)$ e F è strettamente positiva :

Per ogni intero $k \geq 1$ esistono $z_k \in \partial U_r(z_o)$ e $z_k' \in F$ tali che

$$|z_k - z_k'| < \varepsilon + \frac{1}{k} . \qquad (**)$$

In particolare,

$$|z_k' - z_o| \leq |z_k' - z_k| + |z_k - z_o| < (\varepsilon + 1) + r\,, \qquad k \geq 1$$

e così la successione $\Big((z_k\,,z_k')\Big)_{k\geq 1}$ è limitata. Risulta che una sua sottosuccessione $\Big((z_{k_j}\,,{z_{k_j}}')\Big)_{j\geq 1}$ converge ad un punto $(z\,,z')$ in $\mathbb{C}^2$. Poiché $\partial U_r(z_o)$ e F sono insiemi chiusi, abbiamo

$$z = \lim_{j\to\infty} z_{k_j} \in \partial U_r(z_o)\,, \quad z' = \lim_{j\to\infty} {z_{k_j}}' \in F$$

e (**) implica

$$\varepsilon \leq |z - z'| = \lim_{j\to\infty} |z_{k_j} - {z_{k_j}}'| \leq \lim_{j\to\infty}\left(\varepsilon + \frac{1}{k_j}\right) = \varepsilon\,.$$

Cosicché $\varepsilon = |z - z'| > 0$.
Sostanzialmente abbiamo dimostrato :

Se $(X\,,d)$ è uno spazio metrico, $K \subset X$ è compatto, $F \subset X$ è chiuso e $K \cap F = \emptyset$, allora la funzione

$$K \times F \ni (x\,,x') \longmapsto d(x\,,x') \in [0\,,+\infty)$$

ha (almeno) un punto di minimo $(x_{\min}\,,x'_{\min})$. Perciò

$$d(K\,,F) = \inf\big\{d(z\,,z')\,;\, z \in K\,, z' \in F\big\}\,.$$

è un minimo, uguale a $d(x_{\min}\,,x'_{\min}) > 0$.

Adesso per

$$\min\big\{r - \varepsilon\,,0\big\} < r_1 < r < r_2 \leq r + \varepsilon$$

abbiamo l'inclusione desiderata :

Sia $z \in \mathbb{C}$ con $r_1 < |z - z_o| < r_2$. Allora

$$\zeta := z_o + \frac{r}{|z - z_o|}\,(z - z_o) \in \partial U_r(z_o)$$

e

$$|z - \zeta| = \left|(z - z_o)\left(1 - \frac{r}{|z - z_o|}\right)\right| = \big||z - z_o| - r\big| < \varepsilon\,.$$

Perciò z non può appartenere ad F e risulta che $z \in f(D)$.

Usando il numero di Lebesgue per ricoprimenti di compatti.

Poiché $\partial U_r(z_o)$ è contenuto nell'insieme aperto $f(D)$, per ogni punto w di $\partial U_r(z_o)$ esiste un $r_w > 0$ con $U_{r_w}(w) \subset f(D)$. L'insieme $\partial U_r(z_o)$ essendo compatto, il suo ricoprimento aperto $\big(U_{\frac{r_w}{2}}(w)\big)_{w\in\partial U_r(z_o)}$ ha un sottoricoprimento finito $\big(U_{\frac{r_{w_j}}{2}}(w_j)\big)_{1\leq j\leq p}$. Allora

$$\delta := \min\left\{\frac{r_{w_j}}{2}\,;\,1\leq j\leq p\right\}$$

è un *numero di Lebesgue* rispetto al ricoprimento $\big(U_{r_w}(w)\big)_{w\in\partial U_r(z_o)}$ di $\partial U_r(z_o)$, cioè per qualsiasi $\zeta \in \partial U_r(z_o)$ il disco $U_\delta(\zeta)$ è contenuto in un insieme $U_{r_w}(z)$, $w \in \partial U_r(z_o)$, del ricoprimento :

Infatti, per qualsiasi $\zeta \in \partial U_r(z_o)$ esiste un $1 \leq j \leq p$ tale che $\zeta \in U_{\frac{r_{w_j}}{2}}(w_j)$ ed allora abbiamo per ogni $\zeta' \in U_\delta(\zeta)$

$$|\zeta' - w_j| \leq |\zeta' - \zeta| + |\zeta - w_j| < \delta + \frac{r_{w_j}}{2} \leq r_{w_j} \ ,$$

cioè ζ' appartiene a $U_{r_{w_j}}(w_j)$.
Sostanzialmente abbiamo dimostrato :

> Se $(Z\,,d)$ è uno spazio metrico, $K \subset Z$ è compatto e $\big(U_\iota\big)_{\iota\in I}$ è un ricoprimento aperto di K , allora esiste un $\delta > 0$ (un *numero di Lebesgue* rispetto al ricoprimento $\big(U_\iota\big)_{\iota\in I}$ di K) soddisfacente la seguente condizione :
>
> Per qualsiasi $\zeta \in K$ esiste un $\iota \in I$ tale che
>
> $$\big\{\zeta' \in Z\,;\,|\zeta' - \zeta| < \delta\big\} \subset U_\iota \ .$$
>
> In parole : per qualsiasi $\zeta \in K$ la palla $\big\{\zeta' \in Z\,;\,|\zeta'-\zeta| < \delta\big\}$ è contenuta in un insieme U_ι , $\iota \in I$, del ricoprimento.

Adesso per

$$\min\big\{r-\delta\,,0\big\} < r_1 < r < r_2 \leq r+\delta$$

abbiamo l'inclusione desiderata :

Sia $z \in \mathbb{C}$ con $r_1 < |z - z_o| < r_2$. Allora

$$\zeta := z_o + \frac{r}{|z - z_o|}\,(z - z_o) \in \partial U_r(z_o)$$

e

$$|z-\zeta| = \left|(z-z_o)\left(1 - \frac{r}{|z-z_o|}\right)\right| = \big||z-z_o| - r\big| < \delta\,.$$

Perciò $z \in U_\delta(\zeta)$. Ma $U_\delta(\zeta)$ è contenuto in uno degli insiemi $U_{r_w}(w)$ con $w \in \partial\, U_r(z_o)$, che a sua volta è contenuto in $f(D)$. Così concludiamo che $z \in f(D)$.

3) : La funzione $\dfrac{z^2}{z+1}$ ha un polo semplice nel zero semplice $z = -1$ del denominatore, che non è un zero anche del numeratore. Poiché il denominatore è $z+1 = z-(-1)$, per trovare lo sviluppo di $\dfrac{z^2}{z+1}$ in serie di Laurent attorno a questo polo, basta sviluppare il numeratore in serie di potenze e dividere questa con $z+1$: da

$$x^2 = \big((z+1)-1\big)^2 = 1 - 2\,(z+1) + (z+1)^2$$

otteniamo lo sviluppo in serie di Laurent

$$\frac{z^2}{z+1} = \frac{1}{z+1} - 2 + (z+1)\,.$$

Per la funzione $\dfrac{1+\sin z}{z+\pi}$ procediamo similmente : essa ha un polo semplice in $z = -\pi$ e dallo sviluppo in serie di potenze

$$1 + \sin z = 1 - \sin(z+\pi) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\,(z+\pi)^{2\,k+1}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin z}{z+\pi} &= \frac{1}{z+\pi} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\,k+1)!}\,(z+\pi)^{2\,k} \\ &= \frac{1}{z+\pi} - 1 + \frac{1}{3!}\,(z+\pi)^2 - \frac{1}{5!}\,(z+\pi)^4 + \frac{1}{7!}\,(z+\pi)^6 - \dots\end{aligned}$$

4) : Indichiamo

$$f(z) := \frac{e^{i\,a z}}{z^2+z+1} = \frac{e^{i\,a z}}{\big(z - e^{\frac{2\pi}{3}\,i}\big)\big(z - e^{-\frac{2\pi}{3}\,i}\big)}\,,$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ e^{\frac{2\pi}{3} i}, e^{-\frac{2\pi}{3} i} \right\}.$$

Allora f è una funzione meromorfa con un polo semplice in in $e^{\frac{2\pi}{3} i}$ ed il suo residuo in questo punto è

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{e^{\frac{2\pi}{3} i}}(f) &= \lim_{z \to e^{\frac{2\pi}{3} i}} \left(z - e^{\frac{2\pi}{3} i} \right) f(z) \\
&= \lim_{z \to e^{\frac{2\pi}{3} i}} \frac{\left(z - e^{\frac{2\pi}{3} i} \right) e^{iaz}}{z^2 + z + 1} = \lim_{z \to e^{\frac{2\pi}{3} i}} \frac{e^{iaz}}{z - e^{-\frac{2\pi}{3} i}} \\
&= \frac{e^{iae^{\frac{2\pi}{3} i}}}{e^{\frac{2\pi}{3} i} - e^{-\frac{2\pi}{3} i}} = \frac{e^{ia(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})}}{2i \sin\frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{e^{ia(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{i\sqrt{3}} = \frac{e^{-i\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}}}{i\sqrt{3}} \\
&= \frac{e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{i\sqrt{3}} \left(\cos\frac{a}{2} - i \sin\frac{a}{2} \right).
\end{aligned}$$

D'altro canto indichiamo, per ogni $r > 0$, con $\partial^+ U_r^+(0)$ il semicerchio

$$\left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| = r , \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}$$

orientato contro il senso delle lancette :

$$\partial^+ U_r^+(0) \text{ è la curva } [0, \pi] \ni t \longmapsto r e^{it} \in \mathbb{C}.$$

Sia ora $r > 1$ e consideriamo la curva chiusa γ_r nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

$$\text{il segmento } [-r, r],$$

con il

$$\text{il semicerchio } \partial^+ U_r^+(0).$$

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{e^{\frac{2\pi}{3} i}}(f) = \frac{2\pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\cos\frac{a}{2} - i \sin\frac{a}{2} \right),$$

quindi

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\, dz = \frac{2\pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\cos\frac{a}{2} - i \sin\frac{a}{2} \right),$$

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\Big(\cos\frac{a}{2} - i\sin\frac{a}{2}\Big) - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Ora la stima

$$\begin{aligned}
\Bigg|\int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\le \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \left|\frac{e^{i\,a z}}{z^2+z+1}\right|\mathrm{d}|z| \\
&\le \pi\,r \sup_{|z|=r\,,\,\mathrm{Im}\,z\ge 0}\left|\frac{e^{i\,a(\mathrm{Re}\,z+i\mathrm{Im}\,z)}}{z^2+z+1}\right| \\
&\le \pi\,r \sup_{|z|=r\,,\,\mathrm{Im}\,z\ge 0}\frac{|\,e^{-a\,\mathrm{Im}\,z}\,e^{i\,a\,\mathrm{Re}\,z}\,|}{|z|^2-|z|-1} \\
&\le \frac{\pi\,r}{r^2-r-1}\,, \qquad r>2
\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

(si potrebbe usare anche il lemma di Jordan, ma in questa situazione non abbiamo veramente bisogno di sfruttare l'acutezza del lemma di Jordan). Risulta

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\,ax}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{e^{i\,ax}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\,\pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\Big(\cos\frac{a}{2} - i\sin\frac{a}{2}\Big)
\end{aligned} \tag{***}$$

e concludiamo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\,\pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\cos\frac{a}{2}\ , \\
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2\,\pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\frac{a}{2}\ .
\end{aligned}$$

Rimarco. Si vede facilmente che possiamo passare al limite per $0 < \alpha \to 0$ sotto il segno di integrale ottenendo la validità di (***) anche per $a = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \, .$$

Ma scopriamo adesso che accade per $a < 0$. Usando la sostituzione $x = -t$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,ax}}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x \overset{x=-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,(-a)t}}{t^2 - t + 1} \, \mathrm{d}t \, .$$

Indichiamo per convenienza $b := -a > 0$. Ripetendo i calcoli nella soluzione del compito precedente per la funzione

$$g(x) = \frac{e^{i\,bz}}{z^2 - z + 1}$$

anziché per $f(z)$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,bt}}{t^2 - t + 1} \, \mathrm{d}t = 2\pi i \operatorname*{Res}_{e^{\frac{\pi}{3} i}}(g) = \frac{2\pi e^{-\frac{b\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \Big(\cos \frac{b}{2} + i \sin \frac{b}{2} \Big) \, .$$

Cosicché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,ax}}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x == \frac{2\pi e^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \Big(\cos \frac{a}{2} - i \sin \frac{a}{2} \Big) \, .$$

Concludiamo che vale per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,ax}}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x == \frac{2\pi e^{-\frac{|a|\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \Big(\cos \frac{a}{2} - i \sin \frac{a}{2} \Big) \, ,$$

cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi e^{-\frac{|a|\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \cos \frac{a}{2} \, ,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x = -\frac{2\pi e^{-\frac{|a|\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \sin \frac{a}{2} \, .$$