

ELEMENTI DI ANALISI NUMERICA - Laurea Magistrale in Matematica

[ex-Analisi Numerica 3 (per Matematica), ex-Analisi Numerica (per Informatica), A.A.2005/2006 (anna-maria@jumpy.it , Mon, 31 Jul 2006)]

A.A.2014/2015 - I semestre

Insegnamento tenuto da CARMINE DI FIORE (difiore@mat.uniroma2.it)

Obiettivi di apprendimento: Completamento di alcune conoscenze di base sull'analisi numerica, con approfondimento di argomenti particolari.

Modalità di esame: Scritto e Orale

PROGRAMMA (nota: il programma può subire variazioni in itinere)

La formula di quadratura dei trapezi e il metodo di estrapolazione di Romberg. Polinomi e numeri di Bernoulli: proprietà e applicazioni (p.es. somme delle potenze dei primi numeri naturali). La formula di Eulero-McLaurin. Calcolo di somme di serie, della costante di Eulero-Mascheroni e dell'errore della formula dei trapezi (i.e. giustificazione dell'efficienza del metodo di Romberg). Stima dell'errore di una formula di quadratura. Formule di quadratura adattive.

Autovalori, principali definizioni e proprietà. Diagonalizzazione di una matrice A simmetrica 3×3 . Generalizzazione: matrici di Givens e il metodo di Jacobi per il calcolo degli autovalori e degli autovettori di A simmetrica $n \times n$ (costo per passo, convergenza, variante ciclica). Il condizionamento del problema degli autovalori di A $n \times n$ generica; Teorema di Bauer-Fike per matrici A diagonalizzabili; il caso di matrici A normali (ovvero diagonalizzabili da unitarie). Un teorema di localizzazione tipo Gershgorin per A normali: applicazioni. Calcolare gli autovalori di A $n \times n$ tridiagonale o di Hessenberg con il metodo di Newton. Il caso A tridiagonale con $A_{i,i+1}A_{i+1,i} > 0$: localizzazione degli autovalori (che sono, in questo caso, reali e distinti) con il teorema di Sturm. Trasformare una matrice A in una matrice di Hessenberg B mediante trasformazioni per similitudine di Givens; complessità; il caso A simmetrica. Ottimalità delle trasformazioni di Givens: il condizionamento di B non è più grande di quello di A . Il metodo delle potenze inverse per il calcolo dell'autovettore corrispondente ad un autovalore di cui si conosce una approssimazione.

Teoria di Perron-Frobenius per matrici A $n \times n$ non negative irriducibili. Il raggio spettrale di A , $\rho(A)$, è un autovalore semplice di A ed esiste ed è unico un vettore $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ tale che $A\mathbf{z} = \rho(A)\mathbf{z}$, $\|\mathbf{z}\|_1 = 1$. Se $A > O$ allora gli altri autovalori hanno modulo più piccolo di $\rho(A)$ (Teorema di Perron) e il metodo delle potenze per approssimare $\rho(A)$ e \mathbf{z} è convergente. Se A è anche stocastica per colonne allora $\rho(A) = 1$ e la successione di vettori generata dal metodo delle potenze $\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k$, $\mathbf{z}_0 > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{z}_0\|_1 = 1$, converge a \mathbf{z} . (Se A è non negativa, irriducibile e stocastica per colonne, è ancora vero che $\rho(A) = 1$ e esiste ed è unico $\mathbf{z} > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{z}\|_1 = 1$ tale che $\mathbf{z} = A\mathbf{z}$, ma il metodo delle potenze può non convergere a \mathbf{z}).

La matrice di transizione di Google P^T del grafo associato al web. Il problema del calcolo del vettore "page rank" \mathbf{p} tale che $\mathbf{p} = P^T\mathbf{p}$. Modifica di P per poter applicare la teoria di Perron-Frobenius (ovvero rendere il vettore \mathbf{p} ben definito) e per rendere convergente il metodo delle potenze per il calcolo di \mathbf{p} . Complessità per passo del metodo delle potenze.

Rapporto incrementale esatto e approssimato: metodi coerenti ϕ per l'integrazione numerica di problemi differenziali di Cauchy (ODE). Il metodo di Eulero; metodi di Taylor di ordine maggiore di 1. Definizione di convergenza dei metodi ϕ ; un teorema di convergenza. Apparente non convergenza per errori di arrotondamento: scelta ottimale di h . Ulteriori importanti proprietà su ϕ : 1) per h fissato > 0 la soluzione discreta deve avere lo stesso andamento della soluzione esatta; 2) tale passo h deve essere adeguato all'andamento (piccolo solo in presenza di picchi). Inefficienza, da questo punto di vista, di Eulero su certi problemi. Rimedio: il metodo di Eulero implicito. Eulero ed Eulero implicito per problemi di Cauchy con due equazioni; applicazione al problema di van der Pol. Implementazione e vantaggi dei metodi impliciti. I metodi Runge Kutta come alternativa efficiente dei metodi di Taylor.

Il metodo delle differenze finite per problemi differenziali al contorno lineari del secondo ordine. Esistenza, unicità, convergenza quadratica e calcolo (con LL^T) della soluzione discreta.

Il metodo delle differenze finite per PDE. Equazione del calore (problema parabolico in dim 1). Schema esplicito, esistenza e unicità, calcolo (calcolare per ogni istante t_j un prodotto matrice-vettore $A \cdot \mathbf{z}$), svantaggi (per non far propagare eventuali errori, passo temporale molto più piccolo di quello spaziale). Schema implicito, esistenza e unicità, calcolo (risolvere per ogni istante t_j un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ (LL^T una sola volta)), vantaggi (passo temporale indipendente da quello spaziale).

La mezza luna metallica. Un esempio di problema parabolico (in dim 2) che diventa un problema ellittico di cui, pur essendo nota la soluzione analitica, è conveniente usare la soluzione discreta proposta dal metodo delle differenze finite.

Il problema ellittico di Poisson: ben definizione della soluzione discreta alle differenze finite. Calcolo di essa con metodi diretti e, più convenientemente, iterativi.

Un problema iperbolico: l'equazione della corda in \mathbb{R} .