1

Esercizio 1

Si risolva l'equazione diff.

$$y' + \frac{y(x+y+1)}{2y+x} = 0$$

con $y(1) = -1$ (Si usa il fattore integrante)

Soluzione. L'eq ed equivalente al studio della forma

$$\omega = (2y+x)\,dy + y(x+y+1)\,dx$$

$$\omega = y(x+y+1)\,dx + (2y+x)\,dy$$

$$M = y(x+y+1) \; ; \; N = (2y+x)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y+x$$

Dunque per trovare un fattore integrante prendiamo

$$h(x) = \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = 1$$

Dunque fattore integrante è $\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$ (modulo una costante)

Si deve trovare un potenziale $U(x,y)$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x y(x+y+1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x(2y+x)$$ risulta $U(x,y) = y^2 e^x + xye^x + c(x)$

(2) Dalla prima equazione risulta $c'(x)=0$ dunque $c(x)$ é una funzione costante. Dunque $U(x,y) = ye^{x}(x+y)$

La condizione iniziale da $U(-1,1)=0$

Sono due possibilità: sia $y=0$ che non conviene e $y=y(x)=-x$ che allora è la soluzione.

~~[illegible]~~ Per continuità si estende anche al $x=0$.

Esercizio 2 Si considero il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -3x^5 \end{cases}$$

Si studia la stabilità al origine (Hint si cerca un potenziale Liapunov della forma $x^n + y^m$.)

Al zero il Jacobiano è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é dunque non-concludente.

Soluzione. Dobbiamo calcolare

$$\dot{V} = \langle \partial V, f \rangle = \partial_x V \cdot \dot{x} + \partial_y V \cdot \dot{y}$$

$$= n x^{n-1}(y - x^3) - 3m y^{m-1} x^5$$

E sufficiente che $n-1=5$, $m-1=1$, dunque $n=6$, $m=2$ e $\dot{V} = 6x^5y - 6x^8 - 6yx^5 = -6x^8 \leq 0$

Dunque $V(x,y) = x^6 + y^2$ e potenziale Liapunov (non stretto)

Dunque $(0,0)$ e stabile ma non asimpt. stabile

③ Esercizio 3

Si consideri la superficie $S=\{(x,y,z) \mid z=2-x-y,\ x^2+y^2\le 1\}$

Il versore normale è orientato verso alto.

a) Si calcoli (con Stokes) $\displaystyle\int_{\partial S}\left(-y^3\,dx + x^3\,dy + dz\right)$

b) Si fa lo stesso calcolo diretto (usando la formula dell'integrale di una forma differenziale)

<u>Soluzione</u>. La parametrizzazione della superficie è $\Phi(x,y) = (x,y,2-x-y)$

$\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $\quad D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$

Il vettore normale è $\partial_x\Phi\wedge\partial_y\Phi =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

(orientato verso alto)

La formula di Stokes implica

$$\int_{\partial S}\omega = \int_S \langle \mathrm{rot}\,F, \nu_\Phi\rangle\, d\sigma = \int_D \langle \mathrm{rot}\,F(\Phi(x,y)), \partial_x\Phi\wedge\partial_y\Phi\rangle\, dx\,dy$$

(a) $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & 1 \end{vmatrix} = 3(y^2+x^2)\vec{k}$

Dunque $\langle \operatorname{rot}\vec{F}, \partial_x\Phi \wedge \partial_y\Phi \rangle = 3(x^2+y^2)$

L'integrale vale $3\int_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 r^2\, r\,dr\right) = 3\cdot 2\pi \int_0^1 r^3\,dr = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

b) Il metodo diretto è $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2-\sin t-\cos t)$

dunque l'integrale si può calcolare come

$\cancel{\int_0^{2\pi} (\sin t)^3 (+\cos t) + (\cos t)^3 \cos t + (\cos t + \sin t)}$

$$\int_0^{2\pi} \left[-(\sin t)^3(-\sin t) + (\cos t)^3 \cos t + (-\cos t + \sin t)\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t)^4 + (\sin t)^4\right] dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\sin^2\cos^2 t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\sin^2 t\cos^2 t\right) dt = \int_0^{2\pi} 1 - \frac{(\sin 2t)^2}{2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\frac{1+\cos 4t}{2}}{2}\right) dt = \int_0^{2\pi} 1 - \frac{1}{4} - \frac{\cos 4t}{4}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 4t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

4 (6 pt) Si consideri la superficie

$$S = \{(x, y, z) | z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\},$$

orientata nel verso della normale interna del paraboloide S.

Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)\,.$$

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}$ attraverso S.

- Sol. La parametrizzazione di S é

$$\Phi(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Non si può usare teorema di divergenza siccome S non é chiusa

$$\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k} = (2x, 2y, 1)$$

Flusso di $\vec{F}$ a traverso S si calcola con la formula

$$-\int_S \langle \vec{F}, \nu_\Phi \rangle \, d\sigma = -\int_D \langle \vec{F}, \partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi \rangle \, dx\,dy =$$

(segno meno siccome orientazione Φ negativa)

$$= -\int_D (2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)) \, dx\,dy = -\int_D (x^2 + y^2) + 4 \, dx\,dy$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 + \rho^2)\rho \, d\rho \, d\theta = -2\pi \int_0^2 (4\rho + \rho^3) \, d\rho =$$

$$= -2\pi \left[2\rho^2 + \frac{\rho^4}{4}\right] = -2\pi \left[8 + \frac{16}{4}\right] = -2\pi \cdot 12 = -24\pi.$$

5 (3pt)**A** Si consideri la funzione $f : [-\pi, \pi] \to R$:

$$f(t) = |t|,$$

estesa, con periodo 2π, su tutto l'insieme dei numeri reali R. Si calcoli la serie Fourier di f.

(3 pt)**B** Si consideri la funzione $g : R \to R$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{10} \cos(kt), t \in R.$$

Si usi il punto precedente per calcolare

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(t)g(t)\, dt.$$

La formula per a_n é $= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \cos nt \, dt$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\, dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$n \neq 0 \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t \cos nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{t \sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\sin nt)\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = +\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

. f pari dunque $b_n = 0$

Dunque (sicome f continua) $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$

g é gia nella trasformata Fourier. $\int_0^{2\pi} \cos nt \cos mt \, dt$

e uguale a 0 se $n \neq m$, e uguale a $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nt)^2 dt = \frac{1}{2}2\pi = \pi$

Sicome le serie sono assolutamente convergente risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt = \frac{\pi}{2}\cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{4} \pi \cdot \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{?}\left(1 + 4\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{(2k+1)^2}\right).$$