

Analisi Matematica II  
Integrali superficiali

**Esercizio 1.** Determinare una rappresentazione parametrica delle seguenti superfici

- (1)  $z = x^2 + y^2$ ,
- (2)  $z = x^2 - y^2$ ,
- (3)  $z^2 = x^2 + 4y^2$ ,
- (4)  $x^2 + y^2 = 1$ ,
- (5)  $x^2 - y^2 = 1, x > 0$ ,
- (6)  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ ,
- (7)  $x^2 + 4(y - 1)^2 + 9z^2 = 4$ ,
- (8)  $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = -1, z < 0$ ,
- (9)  $(x - 1)^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

**Esercizio 2.** Determinare un vettore normale, la retta normale e il piano tangente, nel punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  indicato, alle seguenti superfici

- (1)  $\Phi(u, v) = (u, v, uv)$ , in  $(1, 1, 1)$ ,
- (2)  $\Phi(u, v) = (u + v, u - v, u^2 + v^2)$ , in  $(1, 1, 1)$ ,
- (3)  $\Phi(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$ , in  $(1, 1, 0)$ ,
- (4)  $\Phi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ , in  $(1, 0, 0)$ ,
- (5)  $\Phi(u, v) = (u^2 \cos v, u, u^2 \sin v)$ , in  $(1, 1, 0)$ ,
- (6)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , in  $(1, 0, 0)$ ,
- (7)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , in  $(1, 1, 1)$ ,
- (8)  $x^2 + y^2 = 1$ , in  $(1, 0, 0)$ ,
- (9)  $z = x^2 + y^2$ , in  $(1, 0, 1)$ .

**Esercizio 3.** Calcolare l'area delle superfici seguenti

- (1)  $z = \sqrt{2xy}$ ,  $(x, y) \in [1, 2]^2$ ,
- (2)  $z = x + y^2$ ,  $(x, y) \in [0, 1]^2$ ,
- (3)  $z = \arctg \frac{y}{x}$ ,  $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq x\}$ ,
- (4)  $\Phi(u, v) = (uv, u + v, u - v)$ ,  $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$ ,
- (5)  $\Phi(u, v) = (u \cos v, v, \cos v)$ ,  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, \pi]$ ,
- (6)  $\Phi(u, v) = (\log u, \log v, u)$ ,  $(u, v) \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}] \times [1, e]$ .

**Esercizio 4.** Calcolare i seguenti integrali superficiali

- (1)  $\int_S y^2 d\sigma$ , dove  $S$  è il grafico della funzione  $z = \frac{1}{2}x^2 + y^2$  sull'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ ,

- (2)  $\int_S \frac{x}{\sqrt{4z+1}} d\sigma$ , dove  $S$  è il grafico della funzione  $z = x^2 + y^2$  sull'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \leq 0, x \leq 0\}$ ,
- (3)  $\int_S \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}} d\sigma$ , dove  $S$  è la superficie di equazioni parametriche  $\Phi(u, v) = (u \cos v, v, \cos v)$ ,  $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq u\}$ ,
- (4)  $\int_S (x^2 + y^2) d\sigma$ , dove  $S$  è la superficie di equazioni implicite  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

**Esercizio 5.** Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo vettoriale  $\vec{F}$  attraverso la superficie  $S^+$ , dove

- (2)  $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ , e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , orientata in modo che la prima componente del versore normale sia negativa,
- (2)  $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 3y\vec{k}$ , e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$ , orientato in modo che il vettore normale in  $(0, 0, 0)$  abbia terza componente positiva,
- (3)  $\vec{F} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + (1 + yz)\vec{k}$ , e  $S$  è il grafico della funzione  $z = x^2 + y^2$  sull'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ , orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente negativa,
- (4)  $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$ , e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$ , orientata nel verso della normale interna al paraboloide,
- (5)  $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ , e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , orientata in modo che la seconda componente del versore normale sia negativa,
- (6)  $\vec{F} = z\vec{i}$ , e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1\}$ , orientata nel verso della normale esterna all'ellissoide.

**Esercizio 6.** Calcolare (usando il teorema di Stokes) i seguenti integrali curvilinei

- (1)  $\int_{\partial^+ S} z dx + x^2 y dy + xz^2 dz$ , dove  $S$  è la superficie laterale del solido  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3 - x - 2y\}$ , orientata secondo la normale esterna a  $T$ ,
- (2)  $\int_{\partial^+ S} (x^3 + y^2) dx + (xy^2 + y^4) dy + (xz - 2z^4) dz$ , dove  $S$  è il grafico della funzione  $z = y$ , definita su  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ ,
- (3)  $\int_{\partial^+ S} x^2 dx + z^2(x-1) dy + (y + xy + 2z^7) dz$ , dove  $S$  è il grafico della funzione  $z = 1 + xy$ , definita su  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,
- (4)  $\int_{\gamma} x^7 y dx + (1 + y^8) dy + (xy^2 + z^9) dz$ , dove  $\gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2y + 3 \sin(x^2 + y^2) \end{cases}$ , orientata in modo che la sua proiezione sul piano  $z = 0$  sia percorsa in senso antiorario,
- (5)  $\int_{\gamma} yz^2 dx + 3z^2 dy - 3x dz$ , dove  $\gamma = \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4 \\ y = \log(1 + 2x^2 + z^2) \end{cases}$ , orientata in modo che la sua proiezione sul piano  $y = 0$  sia percorsa in senso antiorario,

- (6)  $\int_{\gamma} -3z dx + 3x^2 dy + yz^2 dz$ , dove  $\gamma = \begin{cases} y^2 + 4z^2 = 4 \\ x = e^{y^2 - z^2} \end{cases}$ , orientata in modo che la sua proiezione sul piano  $z = 0$  sia percorsa in senso antiorario,
- (7)  $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x^3 + y) dy + (x + y + z^3) dz$ , dove  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,
- (8)  $\int_{\gamma} (x^2 - yz) dx + (y^2 + xz^2) dy + (z^2 - xy) dz$ , dove  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1 + \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,
- (9)  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + (y^2 + z^2) dy + (x^2 + z^2) dz$ , dove  $\gamma$  è il perimetro del triangolo di vertici  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , orientato in modo che il vettore tangente in  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  abbia prima componente negativa.

**Esercizio 7.** Calcolare il flusso del campo vettoriale  $\vec{F}$  uscente dalla superficie del solido  $D$ , quando

- (1)  $\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ , e  $D = [0, 1]^3$ ,
- (2)  $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ , e  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$ ,
- (3)  $\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ , e  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ,
- (4)  $\vec{F}(x, y, z) = z \vec{i} + x^2 y \vec{j} + y^2 z \vec{k}$ , e  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$ ,
- (5)  $\vec{F}(x, y, z) = y \vec{i} + x \vec{j} + z\sqrt{x^2 + y^2} \vec{k}$ , e  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$ ,
- (6)  $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + 2y \vec{j} - 3z\sqrt{x^2 + y^2} \vec{k}$ , e  $D = [0, 1]^3$ ,
- (7)  $\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{i} + 4y^3 \vec{j} + z \vec{k}$ , e  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 2z^2 \leq 4\}$ ,
- (8)  $\vec{F}(x, y, z) = ye^{x+y} \vec{i} - xe^{x+y} \vec{j} + xy \vec{k}$ , e  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq x \leq 2 - |y|, 0 \leq z \leq x + y\}$ .

**Esercizio 8.** Calcolare il flusso del campo vettoriale  $\vec{F}$  attraverso la superficie  $S^+$ , dove

- (1)  $\vec{F}(x, y, z) = (y + z) \vec{i} + (z + x) \vec{j} + (x + y) \vec{k}$ , e  $S$  è la porzione di paraboloido di equazione  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ , e orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva,
- (2)  $\vec{F}(x, y, z) = (y + z^2) \vec{i} + (z + x^2) \vec{j} + (x + y^2) \vec{k}$ , e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$ , è orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva,
- (3)  $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ , e  $S^+$  è la parte di superficie sferica unitaria con centro nel punto  $(0, 0, 0)$  giacente nel semispazio  $y \leq 0$ , e orientata secondo il versore normale esterno  $\vec{n}_e$ ,
- (4)  $\vec{F} = y \vec{i} + z \vec{j} + (x - y) \vec{k}$ , e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, 0 \leq y \leq 2\}$ , e orientata in modo che il vettore normale in  $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$  abbia prima componente positiva,
- (5)  $\vec{F} = y^2 \vec{i} + z \vec{k}$ , e  $S^+$  è la superficie dell'ellissoide  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ , compresa tra i piani  $z = 0$  e  $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , e orientata secondo la normale esterna,
- (6)  $\vec{F} = y \vec{i} + \vec{j}$ , e  $S^+$  è la superficie aperta, orientata in modo che il vettore normale in  $(0, 1, 1)$  abbia seconda componente positiva, e generata dalla rotazione di  $2\pi$  intorno all'asse  $z$  della poligonale  $\gamma$  giacente nel piano  $yz$ , che congiunge i punti  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 1, 2)$ ,

- (7)  $\vec{F} = \vec{j} + \vec{k}$ , e  $S$  è la superficie, orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva, e generata dalla rotazione di  $2\pi$  intorno all'asse  $z$  della curva  $\gamma$  di equazioni  $y = u$ ,  $z = \sin u$ ,  $u \in [\pi, \frac{5}{2}\pi]$ ,
- (8)  $\vec{F} = \vec{j} + \vec{k}$ , e  $S$  è la superficie, orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva, e generata dalla rotazione di  $2\pi$  intorno all'asse  $z$  della curva  $\gamma$  di equazioni  $y = u$ ,  $z = \sin u$ ,  $u \in [\pi, 3\pi]$ ,
- (9)  $\vec{F} = y\vec{i} + 2x\vec{j} + z\vec{k}$ , e  $S^+$  è la superficie, orientata in modo che il vettore normale nel punto  $(0, 0, 2)$  abbia terza componente positiva, giacente nel semispazio  $z \geq 0$ , e generata dalla rotazione di un angolo  $\pi$  intorno all'asse  $x$  della curva chiusa regolare a tratti  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , dove  $\gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 = 1, y \geq 1, z = 0\}$  e  $\gamma_2$  è il segmento tra i punti  $(1, 1, 0)$  e  $(-1, 1, 0)$ .